UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y TECNOLOGÍA

PROYECCIONES ORTOGONALES GENERALIZADAS

MAGELIS MICHEL CASAS MELA

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICA PURA

PANAMÁ REPUBLICA DE PANAMÁ
2014

ST

Titulo de la Tesis **PROYECCIONES ORTOGONALES GENERALIZADAS**

TESIS

Sometida para optar al titulo de Maestria en Matematica

Vicerrectoria de Investigacion y Postgrado

Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnologia

APROBADO POR

Jorge Hernández

Doctor Jorge Hernandez U
Presidente

Profesor Elmir Carvalho
Miembro

Daniel Vasquez

Profesor Daniel Vásquez
Miembro

REFRENDADO POR

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA

AGRADECIMIENTO

En primer lugar agradezco a Dios nuestro padre por darme la vida y la inteligencia para poder culminar mis estudios

También al Doctor Jorge Hernández por haber aceptado asesorarme y por compartirme parte de sus conocimientos

A mi familia a mis padres y hermanos por su incondicional apoyo y comprensión En especial a mi madre por brindarme sus palabras de aliento en los momentos más difíciles

Finalmente deseo expresar mi más sincera gratitud a mis compañeros amistades y familiares que de una u otra manera contribuyeron a que la culminación de mis estudios se realizara

A todos muchas gracias

DEDICATORIA

Dedico este trabajo con mucho amor y cariño

A mis padres Maribel y Epiménides por siempre haber estado junto a mí apoyándome

A mis hermanos Edwin y Milagros por su comprensión y cariño

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

En esta investigación presentamos una generalización de las proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert H Estudiamos para ello la forma sesquilineal acotada $\langle\ \rangle\ H\times H\to\mathbb{C}$ definido por $\langle\varepsilon\ \eta\rangle\ =\langle A\varepsilon\ \eta\rangle\ \varepsilon\ \eta\in H$ con $A\in B(H)$ Probamos bajo qué condiciones un operador $T\in B(H)$ es un A adjunto de $L\in B(H)$ y cuando se cumple que $L^{*}A=AT$ y $AT=T^{*}A$ es decir cuando el operador T es A autoadjunto Finalmente estudiamos el conjunto $P(A,S)=\{Q\in B(H)\ Q^2=Q\ R(Q)=S\ AQ=Q^{*}A\}$ del que surge el concepto de compatibilidad esto es cuando $P(A,S)\neq\varnothing$ Caracterizamos la compatibilidad del par $(A\ S)$ consideramos para ello la representación matricial de A la proyección ortogonal sobre S $P=P_S$ el $Ran(PAP)$ entre otros Entre las condiciones de compatibilidad para el par $(A\ S)$ que presentamos están $S+S^{\perp A}=H$ o si existe un subespacio cerrado $W\subseteq S^{\perp}$ tal que $S\oplus W=H$ donde $S^{\perp A}=\{x\in H\ \langle x\ z\rangle_A=0\ \textit{para todo}\ z\in S\}$

ABSTRACT

In this investigation we present a generalization of the orthogonal projections in a space of Hilbert H We studied for that purpose the bounded sesquilinear form $\langle\ \rangle\ H\times H\to\mathbb{C}$ defined by $\langle\varepsilon\ \eta\rangle\ =\langle A\varepsilon\ \eta\rangle\ \varepsilon\ \eta\in H$ with $A\in B(H)$ We proved under what conditions an operator $T\in B(H)$ is an A-adjoint of $L\in B(H)$ and when it is true that $L^{*}A=AT$ and $AT=T^{*}A$ that is to say when the operator T is A selfadjoint Finally we studied the set $P(A,S)=\{Q\in B(H)\ Q^2=Q\ R(Q)=S\ AQ=Q^{*}A\}$ from which the concept of the pair compatibility comes up that is when $P(A\ S)\neq\varnothing$ we characterized the compatibility of the pair for that we took into account the matrix representation of A the orthogonal projection over S $P=P_S$ the $Ran(PAP)$ among others Among the compatibility conditions for the pair $(A\ S)$ that we presented are $S+S^{\perp A}=H$ or if there exists a closed subspace $W\subseteq S^{\perp}$ such that $S\oplus W=H$ where $S^{\perp}=\{x\in H\ \langle x\ z\rangle_A=0\ \textit{for every}\ z\in S\}$

INTRODUCCIÓN

En Geometría las proyecciones han sido estudiadas durante los ultimos 50 años especialmente desde los inicios de la Teoría espectral Las aplicaciones que éstas tienen en la Geometría y en diversas áreas de la Matemática (Teoría de muestreo Teoría de marcos problemas de mínimos cuadrados entre otros) han hecho que su estudio cobre cada vez más interés particularmente el caso de las proyecciones ortogonales

El tema central del trabajo radica en producto interno $\langle \ \rangle \ H \times H \to \mathbb{C}$ definido por

$$\langle \varepsilon \ \eta \rangle \ = \langle A\varepsilon \ \eta \rangle \quad \varepsilon \ \eta \in H$$

donde A es un operador lineal acotado positivo

En el primer capítulo nos centramos en el estudio de los distintos tipos de operadores que se presentan en un espacio de Hilbert probando las propiedades más sobresalientes sobre ellos

En el segundo capítulo estudiamos los operadores positivos demostramos bajo qué condiciones un operador es positivo Definimos la raíz cuadrada de un operador y probamos el teorema de existencia y unicidad También definimos el operador proyección demostramos teoremas sobre su existencia y establecemos resultados de convergencia de sucesiones de proyecciones

En el tercer capítulo estudiamos el producto interno $\langle \ \rangle$ De este nuevo producto interno surge el concepto de operadores A adjuntos para un operador $L \in B(H)$ esto es operadores en los que $\langle L(x) \ y \rangle \ = \langle x \ W(y) \rangle_A$ para todo $x \ y \in H$ y con $W \in B(H)$ Demostramos teoremas que nos permiten caracterizar su existencia entre ellos el Teorema de Douglas el cual relaciona la existencia de operadores A adjuntos con soluciones de la ecuación $AX = T^*A$

Además estudiamos las proyecciones que son autoadjuntas con respecto al producto interno $\langle\ \rangle$ esto es proyecciones Q en las cuales

$$AQ = Q\ A$$

A tales proyecciones también se les conoce como A autoadjuntas Probamos que Q es A autoadjunta si $Ker(Q) \subseteq (Ran(Q))^{\perp}$ lo que equivale a que $\langle Q(\varepsilon)\ Q(\varepsilon)\rangle \leq \langle \varepsilon\ \varepsilon\rangle$ para todo $\varepsilon \in H$

El primero de los trabajos correspondientes a un estudio sobre la teoría de las proyecciones A autoadjuntas pertenece a M G Krein [34] Luego le siguieron los trabajos de A C Zaanen [54] W T Reid [49] y J Dieudonné [24] Entre trabajos más recientes están los realizados por P Cojuhari [11] y S Hassi [31]

Finalmente se estudia la compatibilidad del par $(A\ S)$ es decir cuando el conjunto $P(A\ S)$ es diferente del vacío $(P(A,S) \neq \varnothing)$ con $P(A,S) = \{\ Q \in B(H)\ \ Q^2 = Q\ \ R(Q) = S\ \ AQ = Q\ A\}$ donde $R(Q)$ indica el rango de Q

Probamos que un operador Q es A autoadjunto si y solo si $Ker(Q) \subseteq (Ran(Q))$ con $Q \in B(H)$ y $Q^2 = Q$ Demostramos que la compatibilidad del par $(A\ S)$ equivale a que $S + S^{\perp A} = H$ o a que la ecuación $(PAP)X = PA(I-P)$ admita solución También demostramos que la compatibilidad del par $(A\ S)$ se verifica si $S + Ker(A)$ es cerrado o que él $Ran(PAP)$ sea cerrado

La noción de compatibilidad fue introducida por G Corach A Maestripieri y D Stojanoff [13] y ha sido estudiada para diferentes clases de operadores

CAPÍTULO I

OPERADORES ESTÁNDAR EN UN ESPACIO DE HILBERT

I Operadores estándar en un espacio de Hilbert

1 1 Operadores lineales acotados

En esta sección X y Y son espacios vectoriales sobre el cuerpo $K(K=\mathbb{R}\ o\ K=\mathbb{C})$ y $T\ \ D(T)\subset X\rightarrow Y$ será un operador lineal donde $D(T)$ es un subespacio vectorial de X

En el siguiente teorema se caracterizan los operadores lineales continuos el cual sirve de motivación para introducir los operadores lineales acotados

Teorema 1 1 1 Sean X Y espacios normados y $T\ \ D(T)\subset X\rightarrow Y$ un operador lineal Los siguientes enunciados son equivalentes

a) T es uniformemente continuo

b) T es continuo

c) T es continuo en 0

d) Existe un numero real positivo k tal que $\|T(x)\|\leq k\|x\|$ para todo $x\in D(T)$

Demostración

$a\Rightarrow b$) Por hipótesis y definición de continuidad

$b\Rightarrow c$) Si T es continuo en X entonces lo es en $0\in X$

$c\Rightarrow d$) Sea $\varepsilon=1$ Como T es continuo en 0 existe un $\delta>0$ tal que

$$\|x\|\leq\delta\ \Rightarrow\ \|T(x)-T(0)\|=\|T(x)\|\leq\ \varepsilon=1 \qquad (*)$$

Sea $x \in D(T)$ $x \neq 0$ Tomemos

$$w = \frac{\delta}{\| x \|} x$$

Note que $\| w \| = \delta$ Luego por ( ) se tiene que $\| T(w) \| \leq 1$ O sea que

$$\left\| T\left(\frac{\delta}{\| x \|} x \right) \right\| \leq 1$$

de donde

$$\frac{\delta}{\| x \|} \| T(x) \| \leq 1$$

y

$$\| T(x) \| \leq \delta \quad \| x \|$$

Además

$$\| T(0) \| \leq \delta \quad \| 0 \| = 0$$

Así se tiene que $\| T(x) \quad \| \leq k \|x\|$ para todo $x \in D(T)$ donde $k = \delta$

$d \Rightarrow a$) Supongamos que existe un $k \in \mathbb{R}$ $k > 0$ tal que

$$\| T(x) \quad \| \leq k \|x\| \quad \text{para todo } x \in D(T)$$

Sean x $y \in D(T)$ entonces

$$\| T(x)-T(y) \| = \| T(x-y) \| \leq k \| x-y \|$$

Esto implica que T es Lipschitziano Por consiguiente T es uniformemente continuo

Definición 1 1 1 Sean X Y espacios normados y $T \; D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal T es un operador lineal acotado si existe un numero real positivo k tal que

$$\| T(x) \| \leq k \| x \| \text{ para todo } x \in D(T)$$

La norma de un operador lineal acotado T se denota por $\| T \|$ y se define por

$$\| T \| = \inf \{ k \in \mathbb{R} \;\; \| T(x) \| \leq k \| x \| \;\; \forall x \in D(T) \}$$

Denotamos

$$B(X \; Y) = \{ T \;\; X \to Y \;\; T \text{ es un operador lineal acotado } \}$$

Si $X = Y$ escribimos $B(X \; Y) = B(X)$

Teorema 1 1 2 Sean X Y espacios normados y $T \; D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal acotado Entonces

$$\| T \| = Sup \left\{ \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \;\; x \in D(T) \;\; x \neq 0 \right\}$$

y

$$\| T(x) \| \leq \| T \| \, \| x \| \quad \text{para todo } x \in D(T)$$

Demostración

Si T es un operador lineal acotado entonces existe un numero real positivo k tal que

$$\| T(x) \| \leq k \| x \| \quad \text{para todo } x \in D(T)$$

lo cual equivale a que

$$\frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \leq k \quad \text{para todo } x \in D(T) \quad x \neq 0$$

Consideremos el conjunto

$$A = \{ k \in \mathbb{R} \quad \| T(x) \| \leq k \| x \| \quad \forall x \in D(T) \}$$

entonces

$$\| T \| = \inf(A)$$

Sea $k \in A$ entonces $\| T(x) \| \leq k \| x \|$ para todo $x \in D(T)$ Por lo tanto

$$\frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \leq k \quad \text{para todo } x \in D(T) \quad x \neq 0$$

Luego k es una cota superior del conjunto

$$B = \left\{ \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \quad x \in D(T) \quad x \neq 0 \right\}$$

Así $Sup(B) \leq k$ para todo $k \in A$ De donde

$$Sup(B) \leq \| T \| \qquad (1)$$

Sea M una cota superior de B entonces

$$\frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \leq M \quad \text{para todo } x \in D(T) \;\; x \neq 0$$

Por lo tanto

$$\| T(x) \| \leq M \| x \| \quad \text{para todo } x \in D(T)$$

De donde $M \in A$ Por consiguiente

$$\| T \| \leq M \quad \text{para toda cota superior M de B} \qquad (2)$$

Así de (1) y (2) se tiene que

$$\| T \| = Sup(B)$$

O sea que

$$\| T \| = \inf \{ k \,/\, \| T(x) \| \leq k \| x \| \;\; \forall x \in D(T) \}$$

$$= Sup \left\{ \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \;\; x \in D(T), x \neq 0 \right\}$$

Además

$$\frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \leq \| T \| \text{ para todo } x \in D(T) \quad x \neq 0$$

de donde

$$\| T(x) \| \leq \| T \| \, \| x \| \quad \text{para todo } x \in D(T)$$

Corolario 1 1 1 Sean X Y espacios normados y $T \; D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal acotado Entonces

a) Si $x \;\; \to x$ con $x \;\; x \in D(T)$ entonces $T(x \;\;) \to T(x)$

b) $Ker\,(T) = \{ \, x \in D(T) \cdot T(x) = 0 \, \}$ es cerrado en $D(T)$

Demostración

a) Supongamos que $x \;\; \to x$ con $x \;\;\; x \in D(T)$ Entonces

$$\| T(x \;\;) - T(x) \| = \| T(x \;\; - x) \| \leq \| T \| \| x \;\; - x \| \xrightarrow[\to\infty]{} 0$$

Por lo cual $T(x \;\;) \to T(x)$

b) Sea $x \in \overline{Ker\,(T)} \subset D(T)$ entonces existe una sucesión $\{ x \;\; \}_{n=1}^{\infty}$ en $Ker\,(T)$ tal que $x \;\; \to x$ Luego por la parte (a) de este corolario se tiene que $T(x \;\;) \to T(x)$ Como $x \;\; \in Ker\,(T)$ se tiene que $T(x \;\;) = 0$ para todo n De donde $T(x) = 0$ Así $x \in Ker\,(T)$ y $Ker\,(T)$ es cerrado en $D(T)$

Teorema 1 1 3 Sean X Y espacios normados y $T \; D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal Entonces

a) $\|T\| = Sup\{\|T(x)\| \;\; x \in D(T) \;\; \|x\| = 1\}$

b) $\|T\| = Sup\{\|T(x)\| \;\; x \in D(T) \;\; \|x\| < 1\}$

c) $\|T\| = Sup\{\|T(x)\| \;\; x \in D(T) \;\; \|x\| \leq 1\}$

Demostración

a) Del Teorema 1 1 2 se tiene que

$$\| T \| = Sup_{D(T)} \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} = Sup_{\substack{D(\;)\\ x \neq 0}} \left\| \frac{1}{\| x \|} T(x) \right\| = Sup_{\substack{x \in D(T)\\ x \neq 0}} \left\| T\left(\frac{x}{\| x \|} \right) \right\| = Sup_{\substack{x \in D(T)\\ \| \;\|}} \| T(x) \|$$

Así pues

$$\| T \| = Sup_{\substack{\in D(T)\\ \| \;\|}} \| T(x) \| = Sup\{\| T(x) \| \;\; x \in D(T) \;\; \| x \| = 1\}$$

(b) y (c) se prueban de forma similar

Teorema 1 1 4 Sean X Y espacios normados y $T \; D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal los siguientes enunciados son equivalentes

a) T es un operador lineal acotado

b) Si $A \subset D(T)$ es acotado entonces $T(A)$ es acotado en Y

Demostración

$a \Rightarrow b)$ Si T es un operador lineal acotado por el Teorema 1 1 2 se tiene que

$$\| T(x) \| \leq \| T \| \| x \| \quad \text{para todo } x \in D(T)$$

Sea $A \subset D(T)$ acotado entonces existe un $M \in \mathbb{R}, M > 0$ tal que

$$\| x \| \leq M \quad \text{para todo } x \in A$$

Sea $y \in T(A)$ entonces existe un $x \in A$ tal que $y = T(x)$ Luego

$$\| y \| = \| T(x) \| \leq \| T \| \| x \|$$

$$\leq M \| T \|$$

Por consiguiente $T(A)$ es acotado en Y

$b \Rightarrow a$) Sea

$$A = \{ x \in D(T) \quad \| x \| \leq 1 \}$$

entonces A es un subconjunto acotado de $D(T)$ Luego por hipótesis existe un $M > 0$ tal que

$$\| T(x) \| \leq M \quad \text{para todo } x \in A$$

Sea $x \in D(T)$ $\quad x \neq 0$ Entonces $\frac{x}{\| x \|} \in A$ Por lo tanto

$$\left\| T\left(\frac{x}{\| x \|} \right) \right\| \leq M$$

de donde

$$\| T(x) \| \leq M \| x \| \quad \text{para todo} \quad x \in D(T)$$

Por consiguiente T es un operador lineal acotado

Teorema 1 1 5 Sean X Y espacios normados El conjunto

$$B(X\ Y) = \{ T\ X \to Y \,/\, T \text{ es un operador lineal acotado } \}$$

es un espacio vectorial sobre K con las operaciones usuales de funciones

Demostración

Sean $S\ T \in B(X\ Y)$ Entonces para todo $x \in X$ y para todo $\lambda \in K$ se tiene que

$$\begin{aligned} \| (S+T)(x) \| &\leq \| S(x) \| + \| T(x) \| \\ &\leq \| S \| \| x \| + \| T \| \| x \| \\ &\leq (\| S \| + \| T \|) \| x \| \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \| (\lambda\, S)(x) \| &= | \lambda | \| S(x) \| \\ &\leq | \lambda | \| S \| \| x \| \end{aligned}$$

Por lo tanto $S+T$ y $\lambda\, S$ están en $B(X\ Y)$ De donde $B(X\ Y)$ es un espacio vectorial sobre K

Teorema 1 1 6 Sean X Y espacios normados La función

$$\| \ \| \ B(X\ Y) \to \mathbb{R}$$

$$T \mapsto \| T \| = \inf\left\{ k \in \mathbb{R} \ \ \| T(x) \| \leq k \| x \| \ \ \forall x \in D(T) \right\} = Sup_{x \neq 0} \frac{\| T(x) \|}{\| x \|}$$

es una norma sobre $B(X\ Y)$

Demostración

a) Por definición se tiene que $\| T \| \geq 0$

b) $$\| T \| = 0 \ \Leftrightarrow \ Sup\left\{ \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \ \ x \in D(T) \ \ x \neq 0 \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{\| T(x) \ \|}{\| x \|} = 0 \ \ \forall x \in D(T), x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ \| T(x) \| = 0 \ \ \forall x \in D(T) \ \ x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ T(x) = 0 \ \ \forall x \in D(T)$$

$$\Leftrightarrow \ \ T \equiv 0$$

c) $$\| \lambda T \| = \ Sup\left\{ \frac{\| \lambda T(x) \|}{\| x \|} \ \ x \in D(T) \ \ x \neq 0 \right\}$$

$$= \ Sup\left\{ \frac{| \lambda | \| T(x) \|}{\| x \|} \ \ x \in D(T) \ \ x \neq 0 \right\}$$

$$= \ | \lambda | \ Sup\left\{ \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \ \ x \in D(T) \ \ x \neq 0 \right\}$$

$$= \ | \lambda | \| T \|$$

d) Sean $S\ T \in B(X\ Y)$

Luego

$$\|(T+S)x\| = \|T(x)+S(x)\|$$
$$\leq \|T(x)\| + \|S(x)\|$$
$$\leq \|T\|\|x\| + \|S\|\|x\|$$
$$= (\|T\| + \|S\|)\|x\|$$

Así

$$\|(S+T)(x)\| \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\| \quad \text{para todo } x \in D(T)$$

Por consiguiente

$$\|(T+S)\| \leq \|T\| + \|S\|$$

Definición 1 1 2 Sea X un espacio normado sobre K. A los elementos de $B(X\ K)$ ese les llama funcionales lineales acotados Al espacio $B(X\ K)$ se le llama el espacio dual de X y se denota por X

Teorema 1 1 7 Sean X Y espacios normados Si Y es un espacio de Banach entonces $B(X\ Y)$ es un espacio de Banach

Demostración

Sea $\{T\}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $B(X\ Y)$ Como toda sucesión de Cauchy es acotada existe un $M > 0$ tal que

$$\|T\| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Sea $x \in X$ entonces

$$\|T(x) - T(x)\| = \|(T - T_m)(x)\|$$

$$\leq \|T - T\| \|x\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Por lo tanto $\{T(x)\}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en Y Como Y es completo existe $lim_{\to\infty} T(x) \in Y$ para todo $x \in X$

Definamos el operador

$$T \; D(T) \subset X \to Y$$

$$T(x) := lim_{\to\infty} T(x)$$

Probemos que T es lineal En efecto sean $x \; y \in X$ y $\alpha \;\; \beta \in K$ entonces

$$T(\alpha x + \beta y) = lim_{\to\infty} T(\alpha x + \beta y)$$

$$= lim_{\to\infty} [\, \alpha T(x) + \beta T(y) \,]$$

$$= \alpha \, lim_{\to\infty} T(x) + \beta \, lim_{\to\infty} T(y)$$

$$= \alpha \, T(x) + \beta \, T(y)$$

Probemos ahora que T es un operador lineal acotado En efecto sea $x \in X$ entonces

$$\| T(x) \| = \| \lim_{\to\infty} T (x) \|$$

$$= \lim_{\to\infty} \| T (x) \|$$

$$\leq \lim_{\to\infty} \| T \| \| x \|$$

$$\leq \lim_{\to\infty} M \| x \|$$

$$= M \| x \|$$

Por lo cual T es un operador lineal acotado y $T \in B(X \ Y)$

Probemos ahora que $T \ \to T$ En efecto sea $\varepsilon > 0$ Luego existe un $N > 0$ tal que

$$n \ \ m \geq N \Rightarrow \| T \ - T \ \| < \varepsilon$$

Sean $x \in X$ y $n \ \ m \geq N$ entonces

$$\| T \ (x) - T \ (x) \| \leq \| T \ - T \ \| \| x \|$$

$$< \varepsilon \| x \|$$

Luego para $n \geq N$ se tiene que

$$\| T \ (x) - T(x) \| = \| T \ (x) - \lim_{\to\infty} T \ (x) \|$$

$$= \lim_{\to\infty} \| T \ (x) - T \ (x) \|$$

$$\leq \lim_{\to} \varepsilon \| x \|$$

$$lim_{m\to+\infty}\varepsilon\| x \| = \varepsilon\| x \|$$

de donde

$$\frac{\| (T - T)(x) \|}{\| x \|} \leq \varepsilon \text{ para todo } x \in X \quad x \neq 0$$

y

$$\| T - T \| = Sup_{x\neq} \frac{\| (T - T)(x) \|}{\| x \|} \leq \varepsilon$$

Así pues

$$lim_{\to\infty} T = T$$

Por lo tanto $B(X\ Y)$ es un espacio de Banach

Corolario 1 1 2 Sea X un espacio normado Entonces el dual X es un espacio de Banach

1 2 Operador adjunto en espacios de Hilbert

Un resultado fundamental del cual se obtiene uno de los operadores más importantes en el Análisis Funcional es el Teorema de Representación de

Riesz para funcionales lineales acotados sobre un espacio de Hilbert H el cual presentamos a continuación

Teorema 1 2 1 Sean H un espacio de Hilbert y $f \; H \to K$ un funcional lineal acotado Entonces existe un unico $z \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x \;\; z \rangle \quad \text{para todo } x \in H$$

Además

$$\| z \| = \| f \|$$

Demostración

Si $f = 0$ tomamos $z = 0$ y se verifica lo indicado Por lo que consideremos $f \neq 0$ Como f es un operador lineal acotado entonces $Ker\,(f)$ es un subespacio cerrado de H (Corolario 1 1 1) Además como H es un espacio de Hilbert se tiene que

$$H = Ker\,(f) \oplus Ker\,(f)^{\perp}$$

Sea $z \in Ker\,(f)^{\perp}$ tal que $z \neq 0$ Para $x \in H$ definamos

$$v := f(x)z - f(z)x$$

Luego

$$f(v) = f(x)f(z) - f(z)f(x) = 0$$

de donde

$$v \in Ker\,(f)$$

Como $z \;\in Ker\,(f)^{\perp}$ se tiene que $\langle\, v \quad z \quad\rangle = 0$ por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\, v \quad z \quad\rangle \\ &= \langle\, f(x)z \;\; - f(z\;\;)x \;\; z \quad\rangle \\ &= f(x)\langle\, z \quad\; z \quad\rangle - f(z\;\;)\langle\, x \;\; z \quad\rangle \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(z_0)}{\| z_0 \|^2} \langle\, x \;\; z_0 \,\rangle \\ &= \left\langle\, x \quad \frac{\overline{f(z\;\;)}}{\| z_0 \|^2} z_0 \,\right\rangle \end{aligned}$$

Denotemos

$$z = \frac{\overline{f(z\;\;)}}{\| z_0 \|^2} z_0$$

Luego

$$f(x) = \langle\, x \quad z \,\rangle \quad \text{para todo } x \in H$$

Probemos la unicidad de z En efecto supongamos que

$$f(x)=\langle\, x \quad z \quad \rangle \text{ y } f(x)=\langle\, x \quad z \quad \rangle$$

para todo $x \in H$ Luego

$$\langle\, x \quad z \; - z \quad \rangle = 0 \text{ para todo } x \in H$$

Tomando $x = z \; - z \quad \in H$ se obtiene que

$$\langle\, z \; - z \quad z \; - z \quad \rangle = 0$$

de donde

$$z \; - z \quad = 0 \text{ y } z \quad = z_2$$

Probemos ahora que $\| f \| = \| z \|$

Si $f = 0$ entonces $z = 0$ y por lo tanto $\| f \| = \| z \| = 0$

Supongamos que $f \neq 0$ Luego

$$f(x) = \langle\, x \quad z \,\rangle \text{ para todo } x \in H$$

Note que

$$\begin{aligned} \| z \|^2 &= \langle\, z \;\; z \,\rangle \\ &= f(z) \\ &= | f(z) | \\ &\leq \| f \| \, \| z \| \end{aligned}$$

Como $z \neq 0$ se tiene que

$$\| z \| \leq \| f \| \qquad (1)$$

Por otro lado para todo $x \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned} | f(x) | &= | \langle x \ z \rangle | \\ &\leq \| z \| \| x \| \end{aligned}$$

de donde

$$\| f \| \leq \| z \| \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que

$$\| f \| = \| z \|$$

Teorema 1 2 2 Sean H_1 H_2 espacios de Hilbert y $T \in B(H_1 \ H_2)$ Entonces existe un unico $T^* \in B(H_2 \ H_1)$ tal que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x \ T \ (y) \rangle,$$

para todo $x \in H_1$ $y \in H_2$ Además

$$\| T \| = \| T \ \|$$

Demostración

Sea $y \in H_2$ Definamos el operador

$$f_y \quad H_1 \to K$$

$$f_y(z) = \langle T(z), y \rangle$$

Luego f_y es un operador lineal y

$$\left| f_y(z) \right| = \left| \langle T(z) \quad y \rangle \right| \leq \| T(z) \| \| y \| \leq (\| T \| \| y \|) \| z \|$$

para todo $z \in H_1$ Esto implica que $f_y \in H_1$

Por el Teorema de representación de Riesz existe un unico $z_y \in H_1$ tal que

$$f_y(x) = \langle x \; z_y \rangle \quad \text{para todo } x \in H_1$$

Definamos el operador

$$T \quad H_2 \to H_1$$

$$T \ (y) = z_y$$

Note que

$$\langle x \; T \ (y) \rangle = \langle x \; z_y \rangle = f_y(x) = \langle T(x), y \rangle$$

Así

$$\langle x \; T \ (y) \rangle = \langle T(x) \; y \rangle \quad \text{para todo } x \in H_1 \text{ y para todo } y \in H_2$$

Verifiquemos que T es operador lineal En efecto sean $y_1 \; y_2 \in H \quad \alpha \; \beta \in K$

entonces

$$\left\langle x \; T^{*}(\alpha y_1 + \beta y_2)\right\rangle = \left\langle T(x) \; \alpha y_1 + \beta y_2 \right\rangle$$

$$= \bar{\alpha}\left\langle T(x) \; y_1 \right\rangle + \bar{\beta}\left\langle T(x) \; y_2 \right\rangle$$

$$= \bar{\alpha}\left\langle x \; T^{*}(y_1)\right\rangle + \bar{\beta}\left\langle x \; T^{*}(y_2) \right\rangle$$

$$= \left\langle x \; \alpha T^{*}(y_1)\right\rangle + \left\langle x \; \beta T^{*}(y_2) \right\rangle$$

$$= \left\langle x \; \alpha T^{*}(y_1) + \beta T^{*}(y_2)\right\rangle \quad \text{para todo } x \in H_1$$

Por consiguiente

$$T^{*}(\alpha\, y_1 + \beta\, y_2) = \alpha\, T^{*}(y_1) + \beta\, T^{*}(y_2)$$

Así T^{*} es lineal

Verifiquemos que T^{*} es un operador lineal acotado En efecto

$$\left\| T^{*}(y_2) \right\|^2 = \left\langle T^{*}(y_2) \; T^{*}(y_2)\right\rangle$$

$$= \left\langle TT^{*}(y_2) \quad y_2 \right\rangle$$

$$\leq \left\| T(T^{*}(y_2))\right\| \left\| y_2 \right\|$$

$$\leq \left\| T \right\| \left\| T^{*}(y_2) \right\| \left\| y_2 \right\|$$

Si $\|T\ (y_2)\| \neq 0$ entonces

$$\|T\ (y_2)\| \leq \|T\| \|y_2\|$$

Si $\|T\ (y_2)\| = 0$ entonces

$$\|T\ (y_2)\| \leq \|T\| \|y_2\|$$

Así

$$\|T\ (y_2)\| \leq \|T\| \|y_2\| \qquad \text{para todo } \ y_2 \in H_2$$

Por lo tanto T es un operador lineal acotado y $\|T\ \| \leq \|T\|$

Probemos ahora que $\|T\ \| = \|T\|$

Sea $x \in H_1$ entonces

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x)\ T(x)\rangle$$

$$= \left\langle x\ \ T\ \ (T(x))\right\rangle$$

$$\leq \|x\| \|T\ \ (T(x))\|$$

$$\leq \|x\| \|T\ \ \| \|T(x)\|$$

De forma similar al caso anterior se tiene que $\|T(x)\| \leq \|T\ \ \| \|x\|$ para todo $x \in H_1$

Así

$$\|T\| \leq \|T\|$$

De todo lo anterior se tiene que $\|T\| = \|T\|$

Finalmente probemos la unicidad de T

Supongamos que $S_1 S_2 \in B(H_2 \; H_1)$ son tales que

$$\langle T(x) \;\; y \rangle = \langle x \;\; S_1(y) \rangle = \langle x \;\; S_2(y) \rangle$$

Luego

$$\langle x \;\; (S_1 - S_2)y \rangle = 0 \quad \text{para todo } x \in H_1$$

De donde

$$S_1(y) = S_2(y) \quad \text{para todo } y \in H_2$$

Así

$$S_1 = S_2$$

Por lo tanto T es unico

Definición 1 2 1 Sean H_1 H_2 espacios de Hilbert y $T \in B(H_1 \; H_2)$ El operador T del teorema anterior se le llama el operador adjunto de T

Teorema 1 2 3 Sean X y Y espacios con producto interno y $Q\ X \to Y$ un operador lineal acotado Entonces

a) $Q=0$ si y solo sí $\langle Q(x)\ y \rangle = 0$ para todo $x \in X$ y $y \in Y$

b) Si $Q\ X \to X$ donde X es complejo y $\langle Q(x)\ x \rangle = 0$ para todo $x \in X$ entonces $Q=0$

Demostración

a) Si $Q=0$ entonces $Q(x)=0$ para todo $x \in X$ Luego

$$\langle Q(x)\ y \rangle = \langle 0\ y \rangle = 0 \qquad \text{para todo } x \in X\ \ y \in Y$$

Recíprocamente si $\langle Q(x)\ y \rangle = 0$ para todo $x \in X$ $y \in Y$ entonces

$$\|Q(x)\|^2 = \langle Q(x)\ Q(x) \rangle = 0$$

para todo $x \in X$ Por lo tanto $Q(x)=0$ para todo $x \in X$ Así $Q=0$

b) Por hipótesis $\langle Q(z)\ z \rangle = 0$ para todo $z = \lambda x + y$ x $y \in X$ $\lambda \in \mathbb{C}$ Esto es

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q(\lambda x + y)\ \lambda x + y \rangle \\ &= \langle \lambda Q(x) + Q(y)\ \lambda x + y \rangle \end{aligned}$$

de donde

$$0 = |\lambda|^2 \langle Q(x)\ x \rangle + \langle Q(y)\ y \rangle + \lambda \langle Q(x)\ y \rangle + \overline{\lambda} \langle Q(y)\ x \rangle$$

Los dos primeros términos de la igualdad son cero por hipótesis

Si $\lambda = 1$ entonces

$$\langle Q(x) \;\; y \rangle + \langle Q(y) \;\; x \rangle = 0$$

Si $\lambda = i$ entonces

$$\langle Q(x) \;\; y \rangle - \langle Q(y) \;\; x \rangle = 0$$

Por lo tanto

$$\langle Q(x) \;\; y \rangle = 0 \quad \text{para todo } x \;\; y \in X$$

Así por la parte (a) se tiene que $Q = 0$

Teorema 1 2 4 Sean $H_1 \;\; H_2$ espacios de Hilbert y $T \in B(H_1 \;\; H_2)$ entonces

a) $Ker\,(T) = (Ran\,(T \;\;))^{\perp}$

b) $Ker\,(T \;\;) = (Ran\,(T))^{\perp}$

c) $Ker\,(T \;\;) = \{0\}$ si y solo sí $Ran\,(T)$ es denso en H_2

Demostración

a) Probemos primero que $Ker(T) \subset (Ran\,(T \;\;))^{\perp}$

Sean $x \in Ker\,(T)$ y $z \in Ran\left(T \;\;\right)$ Luego existe un $y \in H_2$ tal que $T \;\; (y) = z$

Por lo tanto

$$\langle x \;\; z \rangle = \langle x \;\; T \;\; (y) \rangle$$

$$\langle x \quad z \rangle = \langle T(x) \quad y \rangle$$

$$= \langle 0 \quad y \rangle$$

$$= 0$$

O sea que $\langle x \quad z \rangle = 0$ para todo $z \in Ran(T \ )$ Esto implica que $x \in (Ran(T \ ))^{\perp}$ Así se tiene que

$$Ker(T) \subset (Ran(T \ ))^{\perp}$$

Probemos ahora que $(Ran(T^{*}))^{\perp} \subset Ker(T)$

Sea $x \in (Ran(T \ ))^{\perp}$ Luego

$$T \ (T(x)) \in Ran(T \ )$$

Por lo tanto

$$\langle x \quad T \ (T(x)) \rangle = 0$$

De donde

$$\| T(x) \|^{2} = \langle T(x) \quad T(x) \rangle = 0$$

Por consiguiente $T(x) = 0$ y $x \in Ker(T)$

Así

$$(Ran(T^{*}))^{\perp} \subset Ker(T)$$

De todo lo anterior se tiene que $Ker(T) = (Ran(T^{*}))^{\perp}$

b) Por la parte (a) tenemos que

$$Ker(T \ ) = (Ran(T^{**}))^{\perp} = (Ran(T))^{\perp}$$

c) Recordemos que

$$(Ran\,(T))^{\perp} = (\overline{Ran\,(T)})^{\perp}$$

Luego por la parte (b) se tiene que

$$Ker(T^{*}) = \{0\} \Leftrightarrow (Ran\,(T))^{\perp} = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{Ran\,(T)})^{\perp} = \{0\}$$

Como H_2 es un espacio de Hilbert

$$H_2 = \overline{Ran\,(T)} + \left(\overline{Ran\,(T)}\right)^{\perp}$$

Por lo tanto

$$Ker\,(T^{*}) = \{0\} \Leftrightarrow H_2 = \overline{Ran(T)}$$

$\Leftrightarrow Ran\,(T)$ es denso en H_2

Corolario 1 2 1 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ tal que $Ran(T)$ es cerrado en H Los siguientes enunciados son equivalentes

a) T es invertible

b) $Ker\,(T^{*}) = \{0\}$ y existe un $\alpha > 0$ tal que $\| T(x) \| \geq \alpha \| x \|$ para todo $x \in H$

Demostración

$a \Rightarrow b)$ Supongamos que T es invertible luego existe $T^{-1} \in B(X)$ tal que

$$\| x \| = \| T^{-1}T(x) \| \leq \| T^{-1} \| \, \| T(x) \|$$

por lo tanto

$$\| T(x) \| \geq \| T^{-1} \|^{-1} \| x \|$$

tomando $\alpha = \| T^{-1} \|^{-1}$ se venfica que $\| T(x) \| \geq \alpha \| x \|$ para todo $x \in H$

Por otro lado sea $x \in Ker(T^{*})$ entonces $T^{*}(x) = 0$ Note que

$$\| x \|^2 = \langle x \; x \rangle = \langle TT^{-1}(x) \; x \rangle = \langle T^{-1}(x) \; T^{*}(x) \rangle = 0$$

De donde $x = 0$ por lo cual $Ker(T^{*}) = \{ 0 \}$

$b \Rightarrow a)$ Como $Ker(T^{*}) = \{ 0 \}$ por el Teorema 1 2 4 (c) $Ran(T)$ es denso en H

Pero como $Ran(T)$ es cerrado en H se tiene que $Ran(T) = H$ Así T es suryectivo

Por otro lado supongamos que $T(x) = 0$ entonces

$$0 = \| T(x) \| \geq \alpha \| x \| \geq 0$$

lo que implica que $x = 0$ Así pues T es inyectivo y por ende biyectivo

Finalmente sea $y \in H$ luego existe un $x \in H$ tal que $T(x) = y$ de donde $T^{-1}(y) = x$ Así

$$\| T^{-1}(y) \| = \| x \| \leq \frac{1}{\alpha} \| T(x) \| = \frac{1}{\alpha} \| y \|$$

Por consiguiente T^{-1} es un operador lineal acotado es decir T es invertible

Teorema 1 2 5 Sean $H_1\ H_2$ espacios de Hilbert y $S\ T \in B(H_1\ H_2)$ $\alpha \in K$ Entonces

a) $\langle T\ (y)\ x \rangle = \langle y\ T(x) \rangle$ para todo $x \in H_1 \quad y \in H_2$

b) $(S+T)\ = S\ + T$

c) $(\alpha T)\ = \overline{\alpha} T$

d) $(T\ )\ = T$

e) $\|T\ T\| = \|TT\ \| = \|T\|^2$

f) $T\ T = 0 \Leftrightarrow T = 0$

g) $(ST)\ = T\ S$ si $H_1 = H_2$

Demostración

a) Sean $x \in H_1 \quad y \in H_2$ entonces

$$\begin{aligned}\langle T\ (y)\ x \rangle &= \overline{\langle x\ T\ (y) \rangle} \\ &= \overline{\langle T(x)\ y \rangle} \\ &= \langle y\ T(x) \rangle\end{aligned}$$

b) Sean $x \in H_1 \quad y \in H_2$ entonces

$$\begin{aligned}\langle x\ (S+T)\ (y) \rangle &= \langle (S+T)(x)\ y \rangle \\ &= \langle S(x) + T(x)\ y \rangle \\ &= \langle S(x)\ y \rangle + \langle T(x)\ y \rangle\end{aligned}$$

$$\left\langle x \quad (S+T)\,(y)\right\rangle = \left\langle x \quad S\,(y)\right\rangle + \left\langle x \quad T\,(y)\right\rangle$$

Así

$$\left\langle x \quad (S+T)^{*}\,(y)\right\rangle = \left\langle x \quad (S + T^{*})\,(y)\right\rangle$$

para todo $x \in H_1 \quad y \in H_2$ Por consiguiente por la unicidad del operador adjunto

$$(S+T) = S + T$$

c) Sean $x \in H_1 \quad y \in H_2$ entonces

$$\left\langle (\alpha T)\,(y) \quad x\right\rangle = \left\langle y \quad (\alpha T)(x)\right\rangle$$

$$= \left\langle y \quad \alpha(T(x))\right\rangle$$

$$= \bar{\alpha}\left\langle y \quad T(x)\right\rangle$$

$$= \bar{\alpha}\left\langle T\,(y) \quad x\right\rangle$$

$$= \left\langle \bar{\alpha}\,T\,(y) \quad x\right\rangle$$

Luego $(\alpha T) = \bar{\alpha}T^{*}$

d) Notemos que $(T\;) = T^{**}$ Luego

$$\left\langle T\;(x) \quad y\right\rangle = \left\langle (x)\;T\;(y)\right\rangle$$

$$= \left\langle T(x) \quad y\right\rangle$$

Por lo que $T^{*}\,(x) = T(x)$ para todo $x \in H$ Así pues $T^{**} = T$

e) Sea $x \in H_1$ entonces

$$
\begin{aligned}
\| T(x) \|^2 &= \langle T(x)\ \ T(x) \rangle \\
&= \langle x\ \ T\ \ T(x) \rangle \\
&\le \| x \| \| T\ T(x) \| \\
&\le \| x \| \| T\ T \| \| x \| \\
&\le \| T\ T \| \| x \|^2
\end{aligned}
$$

Luego

$$\| T(x) \| \le \sqrt{\| T\ T \|}\, \| x \|$$

para todo $x \in H_1$ Por consiguiente

$$\| T \| \le \sqrt{\| T\ T \|}$$

y

$$\| T \|^2 \le \| T\ T \|$$

Así

$$\| T \|^2 \le \| T\ T \|$$

Por otro lado por el Teorema 1 2 2

$$\| T\ T \| \le \| T \| \| T \| = \| T \| \| T \| = \| T \|^2$$

Por consiguiente

$$\|T\|^2 = \|T \ T\|$$

f) $T \ T = 0 \Leftrightarrow \|T \ T\| = 0$

$$\Leftrightarrow \|T\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \|T\| = 0$$

$$\Leftrightarrow T = 0$$

g) Sean $x \ y \in H_1$ entonces

$$\langle x \ (ST) \ y \rangle = \langle (ST)(x) \ y \rangle = \langle T(x) \ S \ (y) \rangle = \langle x \ T \ S \ (y) \rangle$$

Luego $(ST) = T \ S$

Corolario 1 2 2 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ entonces

a) $Ker\,(T) = Ker\,(T \ T)$

b) $\overline{Ran\,(T^*)} = \overline{Ran\,(T^*T)}$

Demostración

a) Sea $x \in Ker\,(T)$ entonces $T(x) = 0$ Luego

$$T^*T(x) = T \ (T(x)) = T^*(0) = 0$$

Por lo tanto $x \in Ker\,(T^*T)$ y

$$Ker(T) \subset Ker(T \ T)$$

Sea ahora $x \in Ker\,(T \ T)$ entonces $T \ T(x) = 0$ Luego

$$0 = \langle x \ T \ T(x) \rangle$$

$$0 = \langle T(x) \;\; T(x) \rangle$$

$$= \| T(x) \|^2$$

Por lo tanto $T(x) = 0$ y $x \in Ker(T)$ Así

$$Ker(T \;\; T) \subset Ker(T)$$

De todo lo anterior se tiene que $Ker(T) = Ker(T^{*}T)$

b) Por el Teorema 1 2 4 y la parte (a) se tiene que

$$\overline{Ran(T \;)} = \left(\left(Ran(T \;) \right)^{\perp} \right)^{\perp}$$

$$= \left(Ker(T) \right)^{\perp}$$

$$= \left(Ker(T^{*}T) \right)^{\perp}$$

$$= \left(\left(Ran(T^{*}T) \right)^{\perp} \right)^{\perp}$$

$$= \left(\left(Ran(T \;\; T) \right)^{\perp} \right)^{\perp}$$

$$= \overline{Ran(T \;\; T)}$$

Teorema 1 2 6 Sea H un espacio de Hilbert Si I es el operador identidad en H entonces $I = I$

Demostración

Si $x \;\; y \in H$ entonces

$$\langle I(x) \;\; y \rangle = \langle x \;\; y \rangle = \langle x \;\; I(y) \rangle$$

Por la unicidad del operador adjunto $I = I$

Teorema 1 2 7 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ Si T es invertible entonces T es invertible y $(T \;)^{-1} = (T^{-1})$

Demostración

Por hipótesis T es invertible por lo que

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

De donde

$$(TT^{-1}) \; = (T^{\;1}T) \; = I \; = I$$

Luego por el Teorema 1 2 5 (g) se tiene que

$$(T^{-1}) \; T \; = T \; (T^{-1}) \; = I$$

Así $(T \;)^{-1}$ es biyectivo y

$$(T \;)^{-1} = (T^{\;1}) \; \in B(H)$$

De donde T es invertible

1 3 Operadores autoadjuntos

En esta sección estudiaremos las propiedades fundamentales de uno de los operadores más importantes en la teoría de operadores acotados en un espacio de Hilbert

Definición 1 3 1 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ T es autoadjunto sí $T = T$

Observaciones

- T es autoadjunto si y solo si $\langle T(x), y\rangle = \langle x\ T(y)\rangle$ para todo $x \quad y \in H$
- En lo que sigue denotaremos

$$AB(H) = \{\, T \in B(H) \ \ T \ \ \textit{es autoadjunto} \ \}$$

Teorema 1 3 1 Sean H un espacio de Hilbert $S\ T \in AB(H)\ y\ \alpha\ \ \beta \in \mathbb{R}$ entonces

a) $\alpha S + \beta T \in AB(H)$

b) $AB(H)\, es\ cerrado\ en\ B(H)$.

Demostración

a) Del Teorema 1 2 5 se tiene que

$$(\alpha\, S + \beta T)\ = \overline{\alpha}\, S^{*} + \overline{\beta}\, T^{*} = \alpha\, S + \beta\, T$$

Luego

$$\alpha S + \beta T \in AB(H)$$

b) Sea $T \in \overline{AB(H)}$ Luego existe una sucesión $\{T \}_{n=1}^{\infty}$ en $AB(H)$ tal que

$T \to T$ en $B(H)$ Note que

$$\| T \ - T \| = \| (T \ - T) \| = \| T \ - T \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Por lo tanto

$$T \ \to T \ \text{ en } \ B(H)$$

Luego como $T \ = T$ se tiene que

$$T \ \to T \ \text{ y } \ T \ \to T \ \text{ en } \ B(H)$$

Por la unicidad del límite $T \ = T$ Así $T \in AB(H)$ y $AB(H)$ es cerrado en $B(H)$

Teorema 1 3 2 Sean H un espacio de Hilbert complejo y $T \in B(H)$ Entonces

a) $TT^* \ T \ T \in AB(H)$

b) Existen $S_1 \ S_2 \in AB(H)$ *tal que* $T = S_1 + i\, S_2$

Demostración

a) Note que

$$(TT^*) \ = T^{**} T \ = TT^*$$

y

$$(T\ T) = T\ T^{**} = T\ T$$

Luego TT y $T\ T \in AB(H)$

b) Sean

$$S_1 = \frac{1}{2}(T + T\ ) \quad \text{y} \quad S_2 = \frac{1}{2i}(T - T\ )$$

Luego

$$S_1 \ = \frac{1}{2}(T\ \ + T^{**}) = \frac{1}{2}(T + T\ ) = S_1$$

$$S_2 \ = -\frac{1}{2i}(T\ \ - T^{**}) = \frac{1}{2i}(T - T\ ) = S_2$$

Así

$$S_1\ S_2 \in AB(H) \quad \text{además} \quad T = S_1 + i\, S_2$$

Corolario 1 3 1 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in AB(H)$ invertible Entonces $T^{\ 1}$ es autoadjunto

Demostración

Por el Teorema 1 2 8 se tiene que $(T\ )^{-1} = (T^{\ 1})$ y por hipótesis $T = T$ por lo que $T^{-1} = (T^{-1})$ Por lo tanto $T^{\ 1}$ es autoadjunto

Teorema 1 3 3 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$

a) Si $T \in AB(H)$ entonces $\langle T(x)\ \ x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$

b) Si H es complejo y $\langle T(x)\ \ x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$ entonces $T \in AB(H)$

Demostración

a) Como $T \in AB(H)$

$$\langle\, T(x)\ \ x\,\rangle = \overline{\langle x\ \ T(x)\rangle}$$

$$= \overline{\langle T\ \ (x)\ \ x\ \rangle}$$

$$= \overline{\langle T(x)\ \ x\rangle}$$

Luego $\langle\, T(x)\ \ x\,\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$

b) Sea $x \in H$ entonces

$$\langle\, T(x)\ \ x\,\rangle = \overline{\langle\, T(x)\ \ x\,\rangle} = \langle\, x\ \ T(x)\rangle = \langle\, T\ \ (x)\ \ x\,\rangle$$

De donde

$$\langle\, (T - T\ \ )(x)\ \ x\rangle = 0 \quad \text{para todo } x \in H$$

Como H es complejo por el Teorema 1 2 3 (b) se tiene que

$$T - T\ \ = 0$$

De donde

$$T = T$$

Así $T \in AB(H)$

Corolario 1 3 2 Sean H un espacio de Hilbert y $S\ T \in AB(H)$ Entonces $S\,T \in AB(H)$ si y solo si $S\,T = TS$

Demostración

$\Rightarrow$) Si $ST \in AB(H)$ Entonces

$$(ST) = ST$$

Pero

$$(ST) = T^{*}S = TS$$

Por lo tanto

$$ST = TS$$

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que $ST = TS$ entonces

$$(ST) = T\ S = TS = ST$$

Por lo tanto $ST \in AB(H)$

1 4 Operador unitario

Definición 1 4 1 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ T es unitario si T es invertible y $T = T^{-1}$

Observaciones

- T es unitario si y solo si $TT^{*} = T\ T = I$
- En lo que sigue denotaremos

$$UB(H) = \{ T \in B(H) \ T \text{ es unitario} \}$$

Definición 1.4 2 Sean X Y espacios normados y $T \in L(X\ Y)$ T es una isometría si

$$\| T(x) \| = \| x \| \quad \text{para todo } x \in X$$

Si T es una isometría suryectiva entonces se dice que X Y son espacios isométricamente isomorfos

Observaciones

- Si T es una isometría entonces T es inyectiva
- Si T es una isometría entonces T es un operador lineal acotado y $\| T \| = 1$

Teorema 1 4 1 Sean H un espacio de Hilbert complejo y $T \in B(H)$ $T \in UB(H)$ si y solo sí T es un isomorfismo isométrico

Demostración

$\Rightarrow$)Supongamos que $T \in UB(H)$ Luego T es invertible y $T^{-1} = T$ Así T es un isomorfismo

Por otro lado

$$\| T(x) \|^2 = \langle T(x)\ T(x) \rangle = \langle T\ T(x)\ x \rangle = \langle T^{\ 1}T(x)\ x \rangle = \langle x\ x \rangle = \| x \|^2$$

Así

$$\| T(x) \| = \| x \| \qquad \text{para todo } x \in H$$

Por consiguiente T es un isomorfismo isométrico

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que T es un ısomorfismo ısométrıco entonces T es ınvertıble Además para cada $x \in H$

$$\langle T\ T(x)\ \ x \rangle = \langle T(x)\ \ T(x) \rangle = \| T(x) \|^2 = \| x \|^2 = \langle x\ \ x \rangle = \langle I(x)\ \ x \rangle$$

De donde

$$\langle (T\ T - I)(x)\ \ x \rangle = 0 \quad \text{para todo } x \in H$$

Como H es complejo por el Teorema 1 2 3 (b) se tıene que

$$T\ T - I = 0$$

y

$$T\ T = I$$

Por lo tanto $T^{-1} = T$ Lo que ımplıca que $T \in UB(H)$

Teorema 1 4 2 Sea H un espacıo de Hılbert Entonces

a) $S\imath\ H \neq \{ 0 \}\ y\ T \in UB(H)$ entonces $\| T \| = 1$

b) $S\imath\ T \in UB(H)$ entonces $T^{-1} \in UB(H)$

c) $S\imath\ S\ T \in UB(H)$ entonces $ST \in UB(H)$

d) $UB(H)$ es cerrado en $B(H)$

Demostración

a) Como T es una ısometría $\| T \| = 1$

b) Como $T \in UB(H)$ T es ınvertıble y $T^{-1} = T$ Por lo tanto

$$\left(T^{-1}\right) = \left(T \ \right) = T = \left(T^{-1}\right)^{-1}$$

Luego

$$T^{\ 1} \in UB(H)$$

c) Note que S y T son invertibles y

$$\begin{aligned} (ST) &= T \ S \\ &= T^{-1}S^{-1} \\ &= (ST)^{-1} \end{aligned}$$

Luego

$$ST \ \in UB(H)$$

d) Sea $T \in \overline{UB(H)}$ entonces existe una sucesión $\{T \}_{n=1}^{\infty} \in UB(H)$ tal que

$$T \ \to T \quad en \ \ B(H)$$

Luego

$$T \ \to T$$

Por lo tanto

$$T\,T \ \to TT \quad \text{y} \quad T \ T \ \to T \ T$$

Pero

$$T\,T \ = T_n T^{-1} = I \ \text{ y } \ T \ T \ = I$$

De donde

$$TT^{*} = T^{*}T = I$$

Esto implica que T es invertible y $T \ = T^{-1}$ Así pues $T \in UB(H) \ y \ UB(H)$

es cerrado en $B(H)$

1 5 Operador normal

Definición 1 5 1 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ T es normal si

$T\ T = TT^{*}$

Teorema 1 5 1 Sean H un espacio de Hilbert $T \in B(H)$ normal y $\alpha > 0$

Entonces

a) $\| T(x) \| = \| T\ (x) \|$ para todo $x \in H$

b) Si $\| T(x) \| \geq \alpha \| (x) \|$ para todo $x \in H$ entonces $Ker\left(T\ \right) = \{0\}$

Demostración

a) Por hipótesis $T^{*}T = TT^{*}$ luego

$$\| T(x) \|^2 - \| T\ (x) \|^2 = \langle T(x)\ \ T(x) \rangle - \langle T\ (x)\ \ T\ (x) \rangle$$

$$= \langle T\ T(x)\ \ x \rangle - \langle TT\ (x)\ \ x \rangle$$

$$= \langle T\ T\ \ (x)\ \ x \rangle - \langle TT^{*}(x)\ \ (x) \rangle$$

$$= 0$$

Así

$$\| T(x) \|^2 = \| T\ (x) \|^2$$

Por consiguiente

$$\| T(x) \| = \| T\ (x) \| \quad \text{para todo } x \in H$$

b) Sea $x \in Ker\,(T\ )$ entonces $T\ (x) = 0$ Luego por hipótesis y por la parte (a) se tiene que

$$\| x \| \leq \frac{1}{\alpha} \| T(x) \| = \frac{1}{\alpha} \| T\ (x) \| = 0$$

Por consiguiente

$$\| x \| = 0 \text{ y } x = 0$$

Así pues

$$Ker\,(T\ ) = \{ 0 \}$$

Corolario 1 5 1 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ normal tal que $Ran\,(T)$ es cerrado en H Entonces los siguientes enunciados son equivalentes

a) T es invertible

b) Existe $\alpha > 0$ tal que $\| T(x) \| \geq \alpha \| x \|$ para todo $x \in H$

Demostración

$a \Rightarrow b$) Si T es invertible entonces

$$\| x \| = \| T^{-1} T(x) \| \leq \| T^{\ 1} \| \, \| T(x) \|$$

de donde

$$\frac{\| x \|}{\| T^{-1} \|} \leq \| T(x) \|$$

Tomando $\alpha = \dfrac{1}{\| T^{-1} \|}$ se verifica que

$$\| T(x) \| \geq \alpha \| x \|$$

para todo $x \in H$

$b \Rightarrow a$)Supongamos ahora que existe $\alpha > 0$ tal que $\| T(x) \| \geq \alpha \| x \|$, para todo $x \in H$ Entonces por el Teorema 1 5 1 (b) $Ker(T) = \{0\}$ Luego por el Corolario 1 2 1 T es invertible

CAPITULO II

OPERADORES POSITIVOS Y PROYECCIONES

II Operadores positivos y proyecciones

2 1 Operador positivo

En esta sección definiremos una relación de orden en el espacio de los operadores lineales acotados autoadjuntos $AB(H)$ sobre un espacio de Hilbert complejo H Recordemos que si $T \in AB(H)$ entonces $\langle T(x), x\rangle$ es un numero real para todo $x \in H$

Definición 2 1 1 Sean H un espacio de Hilbert complejo y $T \in B(H)$ T es positivo si $T \in AB(H)$ y $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$

Observación

- Note que si $T \in AB(H)$ entonces T^2 es positivo En efecto $T^2 \in AB(H)$ y

$$\left\langle T^2(x) \quad x \right\rangle = \left\langle T(x) \quad T(x) \right\rangle = \| T(x) \|^2 \geq 0$$

para todo $x \in H$

- En lo que sigue denotaremos

$B(H)^+ = \{ T \in B(H) \;\; T \text{ es positivo} \}$

Teorema 2 1 1 Sean H un espacio de Hilbert complejo y $S\ T \in B(H)$ Entonces

a) $O\ \ I$ son positivos

b) $T\ T$ es positivo (también TT^*)

c) Si S y T son positivos entonces S + T es positivo

d) Si T es positivo y $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ entonces $\alpha\, T$ es positivo

e) Si T es invertible y positivo entonces T^{-1} es positivo

f) Si T es positivo entonces $(I+T)^{\ 1}$ existe

Demostración

a) Como $O\ \ I \in AB(H)$ y

$$\langle\, O(x)\ \ x\,\rangle = \langle\, 0\ \ x\,\rangle = 0 \geq 0$$

$$\langle\, I(x)\ \ x\,\rangle = \langle\, x\ \ x\,\rangle = \| x \|^2 \geq 0$$

para todo $x \in H$ se tiene que $O\ I$ son positivos

b) Sabemos que

$$(T\ T)\ = T\ T$$

por lo tanto $T^*T \in AB\,(H)$ Además

$$\langle\, T\ \ T(x)\ x\,\rangle = \langle\, T(x)\ T(x)\,\rangle = \| T(x) \|^2 \geq 0$$

para todo $x \in H$ Así pues $T T$ es positivo De forma similar se prueba que TT es positivo

c) Como $S\ T \in AB(H)$ por el Teorema 1 3 1 $S+T \in AB(H)$ Además como S y T son positivos

$$\langle (S+T)(x)\ \ x \rangle = \langle S(x)\ x \rangle + \langle T(x)\ \ x \rangle \geq 0$$

para todo $x \in H$ Así pues S + T es positivo

d) Como $T \in AB(H)$ entonces por el Teorema 1 3 1 $\alpha T \in AB(H)$ Además como T es positivo y $\alpha > 0$ se tiene que

$$\langle \alpha T(x)\ x \rangle = \alpha \langle T(x)\ \ x \rangle \geq 0$$

por lo tanto αT es positivo

e) Sean $y \in H$ y $x = T^{-1}(y)$ Como $\langle x\ T(x) \rangle$ es real se tiene que

$$\langle T^{\ 1}(y)\ y \rangle = \langle x\ \ T(x) \rangle = \langle T(x)\ x \rangle \geq 0$$

Por lo tanto T es positivo

f) Sea $x \in H$ tal que $(I+T)(x) = 0$ entonces $-x = T(x)$

Luego como T es positivo

$$0 \leq \langle T(x)\ \ x \rangle = -\langle x\ \ x \rangle = -\| x \|^2 \leq 0$$

por lo tanto $x = 0$ y $(I+T)^{\ 1}$ existe

Notación Sean H un espacio de Hilbert complejo y $S\ \ T \in AB(H)$ Entonces

- Si T es positivo escribimos $T \geq 0$ o $0 \leq T$
- Si S T es positivo escribimos $S \geq T$ ó $T \leq S$

Observación Sean S T $L \in AB(H)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ Bajo la notación anterior se tiene que

- $T \leq S$ si y sólo sí $\langle T(x) \ \ x \rangle \leq \langle S(x) \ \ x \rangle$ para todo $x \in H$
- Si $T \geq 0$ entonces $S \leq S+T$
- Si $S \leq T$ entonces $S+L \leq T+L$
- Si $S \leq T$ y $\alpha > 0$ entonces $\alpha S \leq \alpha T$
- $T \leq T$
- Si $S \leq T$ y $T \leq S$ entonces $S = T$
- Si $S \leq T$ y $T \leq L$ entonces $S \leq L$
- Si $T \geq 0$ entonces $STS \geq 0$

Teorema 2 1 2 Sean H un espacio de Hilbert complejo y S $T \in B(H)$ Si S y T son positivos y ST=TS entonces ST es positivo

Demostración

Si S = 0 el resultado es obvio Así que supongamos que S≠0

Consideremos la siguiente sucesión

$$S_1 = \frac{1}{\| S \|} S \qquad S_{n+1} = S - S^2 \qquad n = 1 \quad 2$$

Probemos por inducción matemática que

$$0 \leq S \quad \leq I \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Para el caso n=1 como $0 \leq S$ por el Teorema 2 1 1

$$0 \leq \frac{1}{\| S \|} S = S_1$$

Por otro lado

$$\langle S_1(x) \quad x \rangle = \frac{1}{\| S \|} \langle S(x) \quad x \rangle$$

$$= \frac{1}{\| S \|} | \langle S(x) \quad x \rangle |$$

$$\leq \frac{1}{\| S \|} \| S(x) \| \| x \|$$

$$\leq \frac{1}{\| S \|} \| S \| \| x \|^2$$

De donde

$$\langle S_1(x) \quad x \rangle \leq \| x \|^2 = \langle x \quad x \rangle = \langle I(x) \quad x \rangle$$

para todo $x \in H$ Por lo tanto $S_1 \leq I$ Así

$$0 \leq S_1 \leq I$$

Supongamos que el enunciado es cierto para n = k o sea que

$$0 \leq S_k \leq I \quad ó \quad 0 \leq I - S_k \leq I$$

Como S es autoadjunto todos los S_k son autoadjuntos Luego para cada $x \in H$ $y = S_k(x)$ se tiene que

$$\left\langle S_k^2(I - S_k)(x) \ (x) \right\rangle = \left\langle S_k(I - S_k)(x) \ S_k(x) \right\rangle$$

$$= \left\langle (I - S_k)(S_k(x)) \ S_k(x) \right\rangle$$

$$= \left\langle (I - S_k)y \ y \right\rangle \geq 0$$

De donde

$$S_k^2(I - S_k) \geq 0$$

De igual forma se prueba que

$$S_k(I - S_k)^2 \geq 0$$

Sumando obtenemos

$$0 \leq S_k^2(I - S_k) + S_k(I - S_k)^2 = S_k^2 - S_k^3 + S_k - 2S_k^2 + S_k^3$$

$$= S_k - S_k^2$$

$$= S_{k+1}$$

de donde

$$0 \leq S_{k\ 1}$$

Por otro lado como

$$S_k^{\ 2} \geq 0 \text{ y } I - S_k \geq 0$$

sumando se obtiene

$$0 \leq I - S_k + S_k^{\ 2} = I - S_{k+1}$$

de donde

$$0 \leq S_{k+1} \leq I$$

Así por inducción se tiene que

$$0 \leq S \quad \leq I \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Probemos ahora que

$$\langle ST(x) \quad x \rangle \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H$$

En efecto de la definición de S_n se tiene que

$$S_1 = S_1^{\ 2} + S_2$$

$$= S_1^{\ 2} + S_2^{\ 2} + S_3$$

$$S_1 = S_1{}^2 + S_2{}^2 + \quad + S^2 + S_{n+1}$$

Por lo tanto

$$S_1 - S_{n+1} = S_1{}^2 + S_2{}^2 + \quad + S_n{}^2$$

Luego $S_1 - S_{n+1} \geq 0$ de allí tenemos que

$$S_1 - (S_1 - S_{n+1}) = S_{n+1} \geq 0$$

Así

$$0 \leq S_1{}^2 + S_2{}^2 + \quad + S^2 \quad \leq S_1 - S_{n+1} \leq S_1$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1} \| S_k(x) \|^2 = \sum_{k=1} \langle \, S_k(x) \quad S_k(x) \, \rangle$$

$$= \sum_{k=1} \left\langle \, S_k{}^2(x) \quad x \, \right\rangle$$

$$= \left\langle \, \sum_{k \quad 1} S_k{}^2(x) \quad x \, \right\rangle$$

$$\leq \langle \, S_1(x) \quad x \, \rangle$$

Por lo tanto la serie

$$\sum_{k \quad 1}^{\infty} \| S_k(x) \|^2$$

$$\langle (ST)(x)\ x\rangle \geq 0$$

para todo $x \in H$ Por lo tanto ST es positivo

Teorema 2 1 3 Sean H un espacio de Hilbert complejo y $\{T\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $AB(H)$ tal que

$$T_1 \leq T_2 \leq \quad \leq T \leq \quad \leq K$$

donde $K \in AB(H)$ Supongamos que los T conmutan con los T_m y con K para todo $m \; n \in \mathbb{N}$ Entonces $\{T\}^{\infty}{}_{1}$ es fuertemente convergente (es decir $\{T\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un $T(x) \in H$ para todo $x \in H$) y este límite define un operador T tal que $T \in AB(H)$ y $T \leq K$

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos el operador

$$S = K - T$$

Luego $\{S\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de operadores positivos

Probemos que la sucesión $\left\{\left\langle S^{2}(x)\ x\right\rangle\right\}_{n-1}^{\infty}$ converge para todo $x \in H$ En efecto

$$S_m^{\,2} - S\ S_m = (S_m - S\ )\,S_m$$

$$= ((K - T_m - (K - T\ ))\,S_m$$

$$= (\ T - T_m\ )(K - T_m)$$

Luego si $m < n$ entonces

$$T - T_m \geq 0 \quad y \quad K - T_m \geq 0$$

pero como estos operadores conmutan entre sí por el teorema anterior

$$(\ T - T_m\ )(K - T_m) \geq 0$$

Por lo tanto

$$m < n \Rightarrow S_m^{\,2} - S\ S_m \geq 0$$

y

$$m < n \Rightarrow S_m^{\,2} \geq S\ S_m$$

Similarmente como

$$S\ S_m - S^{\,2} = S\ (S_m - S\ )$$

$$= (K - T\ )(T - T_m)$$

se tiene que

$$m<n \Rightarrow S\ S_m - S^{2} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad m<n \Rightarrow S\ S_m \geq S^{2}$$

Así pues

$$m<n \Rightarrow S^{2} \leq S\ S_m \leq S_m^{2}$$

Por consiguiente como los S son autoadjuntos tenemos que para $m<n$

$$\left\langle S_m^{2}(x) \quad x \right\rangle \geq \left\langle S\ S_m(x) \quad x \right\rangle \geq \left\langle S^{2}(x) \quad x \right\rangle$$
$$= \left\langle S\ (x) \quad S\ (x) \right\rangle = \| S\ (x) \|^{2} \geq 0$$

para todo $x \in H$ Así pues

$$m<n \Rightarrow \left\langle S_m^{2}(x) \quad x \right\rangle \geq \left\langle S^{2}(x) \quad x \right\rangle \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H$$

Lo cual implica que la sucesión $\left\{\left\langle S^{2}(x)\ x \right\rangle\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en $\mathbb{R}$ para todo $x \in H$

Probemos que la sucesión $\{T\ (x)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en H para todo $x \in H$

$$m<n \Rightarrow S_n^{2} \leq S\ S_m$$

$$\Rightarrow \left\langle S^{2}(x) \quad x \right\rangle \leq \left\langle S\ S_m(x) \quad x \right\rangle$$

$$\Rightarrow -2\left\langle S\ S_m(x) \quad x \right\rangle \leq -2\left\langle S^{2}(x) \quad x \right\rangle$$

Por lo tanto

$$m<n \Rightarrow \| S_m(x) - S\ (x) \|^{2} = \left\langle S_m(x) - S\ (x) \quad S_m(x) - S\ (x) \right\rangle$$

$$\| S_m(x) - S\ (x) \|^2 = \langle (S_m - S\ )^2(x)\ \ x \rangle$$

$$= \langle S_m{}^2(x)\ \ x \rangle - 2\langle S_m S\ (x)\ \ x \rangle + \langle S\ ^2(x)\ \ x \rangle$$

$$\leq \langle S_m{}^2(x)\ \ x \rangle - 2\langle S\ ^2(x)\ \ x \rangle + \langle S\ ^2(x)\ \ x \rangle$$

$$m < n \Rightarrow \| S_m(x) - S\ (x) \|^2 \leq \langle S_m{}^2(x)\ \ x \rangle - \langle S\ ^2(x)\ \ x \rangle \xrightarrow[m\ n \to \infty]{} 0$$

Luego $\{ S\ (x) \}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en H Como H es completo $\{ S\ (x) \}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en H

Ahora bien como $T_n = K - S$ se tiene que la sucesión $\{ T\ (x) \}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en H para todo $x \in H$ Por consiguiente la sucesión de operadores $\{ T\ \}_{n=1}^{\infty}$ es fuertemente convergente

Definamos el operador

$$T\ \ H \to H$$

$$T(x) = lim\ _{n \to \infty} T\ (x)$$

Como los operadores T son lineales T es lineal

Por otro lado sabemos que $\{ T\ (x) \}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en H para cada $x \in H$ Luego $\{ T\ (x) \}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada para cada $x \in H$ Como H es completo por el Teorema de la Acotación Uniforme existe un $c > 0$ tal que

$$\| T \| \leq c \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Por consiguiente

$$\| T(x) \| = \| \lim_{\to\infty} T(x) \| = \lim_{n\to+\infty} \| T(x) \|$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \| T \| \| x \|$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} c \| x \| = c \| x \|$$

Por lo tanto T es un operador lineal acotado

Como cada T es autoadjunto se tiene que T es autoadjunto

Probemos ahora que $T \leq K$ En efecto por hipótesis tenemos que

$$\langle T(x) \ \ x \rangle \leq \langle K(x) \ \ x \rangle \quad \text{para todo } x \in H$$

Luego

$$\langle T(x) \ x \rangle = \langle \lim_{n\to+\infty} T(x) \ \ x \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T_n(x) \ \ x \rangle \leq \langle K(x) \ \ x \rangle$$

Por lo cual

$$\langle T(x) \ \ x \rangle \leq \langle K(x) \ \ x \rangle \quad \text{para todo } x \in H$$

Así pues $T \leq K$

2 2 Operador raíz cuadrada

Definición 2 2 1 Sea $T\ H \to H$ un operador lineal positivo en un espacio de Hilbert complejo H Entonces un operador autoadjunto $A\ H \to H$ es llamado raíz cuadrada de T sí $A^2 = T$

Si además $A \geq 0$ entonces A es llamado la raíz cuadrada positiva de T y es denotado por $A = T^{\frac{1}{2}}$

Teorema 2 2 1 Sean H un espacio de Hilbert complejo y $T\ H \to H$ un operador lineal positivo Entonces T posee una unica raíz cuadrada positiva A Además si $L \in B(H)$ es tal que $LT = TL$ entonces $LA = AL$

Demostración

- Supongamos primeramente que el operador lineal acotado positivo T es tal que $T \leq I$ Definamos la sucesión

$$A_0 = 0 \quad A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2) \quad n = 0\ 1\ 2$$

Luego

$$A_1 = \frac{1}{2}T \quad A_2 = T - \frac{1}{8}T^2 \quad etc$$

Note que cada A es un polinomio en T Por lo tanto todos los A son operadores lineales acotados autoadjuntos Además todos los A conmutan con todo operador que conmuta con T

- Probemos que

$$A \leq I \quad \text{para } n = 0\ 1\ 2$$

En efecto $A_0 = 0 \leq I$ Sea $n > 0$ Como $I - A_{n-1}$ es autoadjunto

$$\left\langle (I - A_{n-1})^2(x)\ x \right\rangle = \langle (I - A_{n-1})(x)\ (I - A_{n-1})(x) \rangle = \| (I - A\ )(x) \|^2 \geq 0$$

Por lo tanto $(I - A_{n-1})^2 \geq 0$ Por otro lado como por hipótesis $T \leq I$ se tiene que $I - T \geq 0$ Luego

$$0 \leq \frac{1}{2}(I - A_{n-1})^2 + \frac{1}{2}(I - T)$$

$$= \frac{1}{2}I - A_{n-1} + \frac{1}{2}A^2{}_{n-1} + \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}T$$

$$= I - A_{n-1} - \frac{1}{2}\left(T - A^2{}_{n-1}\right)$$

$$= I - \left[\ A_{n-1} + \frac{1}{2}\left(T - A^2{}_{n-1}\right)\ \right]$$

$$= I - A$$

Así pues

$$A \leq I, \quad para \quad n = 0, 1, 2,$$

- Probemos por inducción matemática que

$$A \le A_{+1} \qquad para \qquad n = 0\ 1\ 2,$$

En efecto

$$A_0 = 0 \le \frac{1}{2} T = A_1$$

Supongamos que

$$A_{n-1} \le A$$

Entonces por la definición de los A se tiene que

$$A_{\ 1} - A = [\ A + \frac{1}{2}(T - A^{2})\ ] - [\ A_{n-1} + \frac{1}{2}(T - A_{n-1}^{2})\ ]$$

$$= (\ A - A_{n-1}\ ) - \frac{1}{2}(\ A^{2} - A_{n-1}^{2}\ )$$

$$= (\ A - A_{n-1}\ ) - \frac{1}{2}(\ A - A_{n-1}\ )(A + A_{n-1})$$

$$= (A - A_{n-1})[I - \frac{1}{2}(A + A_{n-1})\ ]$$

$$= (A - A_{n-1})\left[\frac{1}{2}(I - A\ ) + \frac{1}{2}(I - A_{n-1})\ \right]$$

Luego como

$$A \quad - A_{n-1} \geq 0 \quad \frac{1}{2}(I - A \quad) \geq 0 \text{ y } \frac{1}{2}(I - A_{n-1}) \geq 0$$

por el Teorema 2 1 2 se tiene que $A_{n+1} - A \quad \geq 0$ de donde $A_n \leq A_{n+1}$ Así pues

$$A_n \leq A_{n+1} \quad \text{para} \quad n = 0 \ 1 \ 2$$

- De todo lo probado anteriormente se tiene que

$$A_0 \leq A_1 \leq \quad \leq A \quad \leq \quad \leq I$$

donde $\{A \quad\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $AB(H)$ y A conmuta con A_m para todo $m \in \mathbb{N}$ Luego por el Teorema 2 1 3 existe un $A \in AB\,(H)$ tal que

$$A \quad (x) \to A(x) \quad \text{para todo } x \in H$$

Además como

$$A_{n+1}(x) = A \quad (x) + \frac{1}{2}\left(T(x) - A \quad^{2}(x)\right)$$

se tiene que

$$\frac{1}{2}\left(T(x) - A \quad^{2}(x)\right) = A_{n+1}(x) - A \quad (x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

pero

$$T(x) - A \quad^{2}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} T(x) - A^{2}(x)$$

Por lo tanto

$$A^2(x) = T(x) \quad \text{para todo } x \in H$$

esto es $A^2 = T$

Por otro lado

$$\langle A(x) \;\; x \rangle = \langle lím_{n\to+\infty} A \;(x) \;\; x \rangle$$

$$= lim_{n\to+\infty} \langle A \;(x) \;\; x \rangle$$

$$\geq 0$$

para todo $x \in H$ ya que $A \;\; \geq 0$ Por consiguiente $A \geq 0$

Hemos probado así que existe un operador $A \in AB\,(H)$ positivo tal que $A^2 = T$

Por consiguiente $A = T^{\frac{1}{2}}$

- Sea $S \in B(H)$ tal que $ST = TS$ entonces por la construcción de los A se tiene que

$$SA_n = A \;\, S \qquad n = 0 \;\; 1 \;\; 2$$

Luego

$$(SA)(x) = S(A(x))$$

$$= S(lím_{n\to+\infty} A \;(x))$$

$$= lím_{n\to+\infty} S(A \;(x))$$

$$(SA)(x) = lim_{n\to\infty} A\ (S(x))$$

$$= A(S(x))$$

$$= (AS)(x)$$

para todo $x \in H$ Por lo tanto $SA = AS$

- Supongamos ahora que $T \in AB(H)$ es positivo (no necesariamente $T \leq I$)

  Si $T = 0$ entonces podemos tomar $A = T^{\frac{1}{2}} = 0$ Así que supondremos que $T \neq 0$ Por la desigualdad de Schwarz se tiene que

$$\langle T(x)\ x\rangle = |\langle T(x)\ x\rangle| \leq \|T(x)\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|^2$$

Consideremos el operador

$$Q = \left(\frac{1}{\|T\|}\right)T$$

entonces Q es un operador lineal acotado positivo Además

$$\langle Q(x)\ x\rangle = \frac{1}{\|T\|}\langle T(x)\ x\rangle \leq \|x\|^2 = \langle x\ x\rangle = \langle I(x)\ x\rangle \quad \text{para todo } x \in H$$

Por lo tanto $Q \leq I$ Así por lo probado anteriormente existe un $B \in AB(H)$ positivo tal que $B^2 = Q$ Tomemos $A = \|T\|^{\frac{1}{2}} B$ entonces A es un operador lineal positivo y

$$A^2=\left(\|T\|^{\frac{1}{2}}B\right)^2=\|T\|B^2=\|T\|Q=\|T\|\left(\frac{1}{\|T\|}\right)T=T$$

- Probemos ahora la unicidad de la raíz cuadrada positiva En efecto sean A B dos raíces cuadradas positivas de T entonces

$$A^2=B^2=T$$

Luego

$$BT=BB^2=B^2B=TB$$

Por lo tanto $AB=BA$ (ya que A conmuta con todo operador lineal acotado que conmuta con T)

Sea $x\in H$ y definamos

$$y=(A-B)(x)$$

entonces como A y B son positivos se tiene que

$$\langle A(y)\ y\rangle\geq 0 \quad y \quad \langle B(y)\ y\rangle\geq 0$$

Ahora bien como $AB=BA$ y $A^2=B^2$ se tiene que

$$\langle A(y)\ y\rangle+\langle B(y)\ y\rangle=\langle (A+B)(y)\ y\rangle$$

$$=\langle (A+B)(A-B)(x)\ y\rangle$$

$$=\langle (A^2-B^2)(x)\ y\rangle$$

$$\langle A(y) \;\; y \rangle + \langle B(y) \;\; y \rangle = 0$$

Por lo tanto

$$\langle A(y) \;\; y \rangle = \langle B(y) \;\; y \rangle = 0$$

Ahora bien como $A \in AB(H)$ es positivo por lo probado anteriormente existe una raíz cuadrada positiva C de A esto es $C^2 = A$ y C es autoadjunto Luego

$$0 = \langle A(y) \;\; y \rangle = \langle C^2(y) \;\; y \rangle = \langle C(y) \;\; C(y) \rangle = \| C(y) \|^2$$

de donde $C(y) = 0$ Por consiguiente

$$A(y) = C^2(y) = C(C(y)) = C(0) = 0$$

Similarmente se prueba que $B(y) = 0$ Por lo tanto

$$(A - B)(y) = 0$$

Finalmente

$$\| A(x) - B(x) \|^2 = \langle (A-B)(x) \;\; (A-B)(x) \rangle$$

$$= \langle (A-B)^2(x) \;\; x \rangle$$

$$= \langle (A-B)((A-B)(x)) \;\; x \rangle$$

$$= \langle (A-B) \; (y) \;\; x \rangle$$

$$\| A(x)-B(x) \|^2 = \langle 0 \quad x \rangle = 0$$

de donde

$$A(x) = B(x) \quad \text{para todo } x \in H$$

Esto implica que $A = B$

Ejemplo 2 2 1 Consideremos el operador lineal

$$T \quad l^2 \to l^2 \quad \text{definido por}$$

$$T(x_1 \quad x_2 \quad) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad x_4 \quad x_5 \quad)$$

Es claro que T es un operador lineal acotado y $\|T\| = 1$ Como

$$\langle T(x_1 \quad x_2 \quad) \, (y_1 \quad y_2 \quad) \rangle = \langle (0 \quad 0 \quad 0 \quad x_4 \quad x_5 \quad) \, (y_1 \quad y_2 \quad) \rangle$$

$$= \sum_{n=4}^{\infty} x \; y$$

y

$$\langle (x_1 \quad x_2 \quad) \, T(y_1 \quad y_2 \quad) \rangle = \langle (x_1 \quad x_2 \quad) \, (0 \quad 0 \quad 0 \quad y_4 \quad y_5 \quad) \rangle$$

$$= \sum_{=4}^{\infty} x \; y$$

por la unicidad del operador adjunto se tiene que $T \; = T$

Así pues T es autoadjunto

Por otro lado

$$\langle T(x_1 \ x_2 \quad) \ (x_1 \ x_2 \quad)\rangle = \langle(0 \ 0 \ 0 \ x_4 \ x_5 \quad) \ (x_1 \ x_2 \quad)\rangle$$

$$= \sum_{n=4}^{\infty} x^{\ 2} \geq 0$$

es decir T es un operador positivo Ahora bien como

$$T^2(x_1 \ x_2 \quad) = T(0 \ 0 \ 0 \ x_4 \ x_5 \quad)$$

$$= (0 \ 0 \ 0 \ x_4 \ x_5 \quad)$$

$$= T(x_1 \ x_2 \quad)$$

por la unicidad de la raíz cuadrada positiva se tiene que $T^{\frac{1}{2}} = T$

Teorema 2 2 2 Sean H un espacio de Hilbert complejo y $T \ H \to H$ un operador lineal acotado positivo Entonces

$$\left\| T^{\frac{1}{2}} \right\| = \| T \|^{\frac{1}{2}}$$

Demostración

Por el Teorema 2 2 1 la raíz cuadrada positiva $T^{\frac{1}{2}}$ de T existe y es unica Denotemos $A = T^{\frac{1}{2}}$ entonces $A^2 = T$ Además

$$\|T\| = \|A^2\| \leq \|A\|\|A\| = \|A\|^2$$

es decir

$$\|T\|^{\frac{1}{2}} \leq \|A\|$$

por otro lado como A es autoadjunto

$$\|A(x)\|^2 = \langle A(x)\ A(x) \rangle$$

$$= \langle A^2(x)\ x \rangle$$

$$= \langle T(x)\ x \rangle$$

$$= |\ \langle T(x)\ x \rangle\ |$$

$$\leq \|T(x)\|\|x\|$$

$$\leq \|T\|\|x\|^2$$

$$= (\ \|T\|^{\frac{1}{2}}\ \|x\|\ )^2$$

Luego

$$\|A(x)\| \leq \|T\|^{\frac{1}{2}}\ \|x\|,\ \text{para todo}\ x \in H$$

y por lo tanto

$$\|A\| \leq \|T\|^{\frac{1}{2}}$$

Así pues

$$\left\|T^{\frac{1}{2}}\right\| = \|A\| = \|T\|^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 2 2 2 Consideremos un operador lineal acotado positivo $T \; H \to H$ en un espacio de Hilbert complejo Entonces por el Teorema 2 2 1 existe el operador raíz cuadrada positiva $T^{\frac{1}{2}}$ de T Sean $x \; y \in H$ entonces

$$\left|\langle T(x) \; y\rangle\right| = \left|\left\langle T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}(x) \; y\right\rangle\right|$$

$$= \left|\left\langle T^{\frac{1}{2}}(x) \; T^{\frac{1}{2}}(y)\right\rangle\right|$$

$$\leq \left\|T^{\frac{1}{2}}(x)\right\| \left\|T^{\frac{1}{2}}(y)\right\|$$

$$= \left(\left\langle T^{\frac{1}{2}}(x) \; T^{\frac{1}{2}}(x)\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left\langle T^{\frac{1}{2}}(y) \; T^{\frac{1}{2}}(y)\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\left\langle T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}(x) \; x\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left\langle T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}(y) \; y\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\langle T(x) \; x\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle T(y) \; y\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$$

Así

$$\left|\langle T(x) \; y\rangle\right| = \left(\langle T(x) \; x\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle T(y) \; y\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{para todo } x \; y \in H$$

Tomemos ahora $y = T(x)$ Si $T(x) = 0$ entonces obviamente

$$0 = |T(x)| \leq |T|^{\frac{1}{2}} \langle T(x) \; x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Supongamos que $T(x) \neq 0$ Entonces de la desigualdad probada anteriormente se tiene que

$$A^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)\in Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\cap Ker\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$$

Recordemos que

$$Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\cap Ker\left(A^{\frac{1}{2}}\right)=Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\cap Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{\perp}=\{0\}$$

de donde

$$A^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)=0$$

Por lo cual $\varepsilon\in Ker\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ y así

$$Ker(A)\subseteq Ker\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$$

Así pues

$$Ker(A)=Ker\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$$

b) Es claro que $Ran(A)\subseteq Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ Consideremos $\varepsilon=\eta+\beta\in H$ donde

$$\eta\in Ker(A) \text{ y } \beta=\lim_{\to\infty}A^{\frac{1}{2}}(\mu\ )\in\overline{Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)}=Ker\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{\perp}$$

Luego

$$A^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)=A^{\frac{1}{2}}(\eta+\beta)$$

$$=A^{\frac{1}{2}}(\eta)+A^{\frac{1}{2}}(\beta)$$

$$A^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)=0+A^{\frac{1}{2}}\left(lim_{n\to+\infty}A^{\frac{1}{2}}(\mu\ )\right)\quad \eta\in Ker(A)=Ker\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=lim\ _{\to\infty}A^{\frac{1}{2}}\left(A^{\frac{1}{2}}(\mu\ )\right)$$

$$=lim_{n\to+\infty}A(\mu\ )\ )\in\overline{Ran(A)}$$

de donde

$$Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\subseteq\overline{Ran(A)}$$

c) Supongamos que $Ran(A)$ es cerrado luego por la parte (b) se tiene que

$$Ran(A)=Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$$

Recíprocamente si $Ran(A)=Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ entonces para cada $\varepsilon\in Ker(A)^{\perp}$

existe un $\eta\in Ker(A)^{\perp}$ tal que $A^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)=A(\eta)$ Luego

$$A^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)=A^{\frac{1}{2}}\left(A^{\frac{1}{2}}(\eta)\right)$$

$$A^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)-A^{\frac{1}{2}}\left(A^{\frac{1}{2}}(\eta)\right)=0$$

$$A^{\frac{1}{2}}\left(\varepsilon-A^{\frac{1}{2}}(\eta)\right)=0$$

entonces

$$\varepsilon-A^{\frac{1}{2}}(\eta)=0$$

$$\varepsilon = A^{\frac{1}{2}}(\eta) \in Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$$

Por lo tanto $\overline{Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)} \subseteq Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ De donde

$$\overline{Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)} = Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$$

Por lo cual $Ran\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = Ran(A)$ es cerrado

2 3 Operadores proyecciones

El complemento ortogonal de un conjunto Y en un espacio de Hilbert H se define como

$$Y^{\perp} = \{\, y \in H \;\; \langle x \;\; y \rangle = 0 \;\; \forall x \in Y \}$$

$Y^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H Más aun si Y es un subespacio cerrado de H entonces

$$Y = \left(Y^{\perp}\right)^{\perp} = Y^{\perp\perp}$$

y

$$H = Y \oplus Y^{\perp}$$

Así para cada $x \in H$ existen elementos unicos $y \in Y$ $z \in Y^{\perp}$ tales que

$$x = y + z$$

y

$$y = dist\left(x, Y\right) \qquad z = dist\left(x \;\, Y^{\perp}\right)$$

o sea que y es la mejor aproximación a x por elementos de Y y z es la mejor aproximación a x por elementos de $Y^{\perp}$

Consideremos las funciones

$$P_Y \;\; H \rightarrow Y \subset H \qquad \text{y} \qquad P_Y \;\; H \rightarrow Y^{\perp} \subset H$$

definido por

$$P_Y\left(x\right) = y = dist\left(x \;\, Y\right) \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad P_{Y^{\perp}}\left(x\right) = z = dist\left(x \;\, Y^{\perp}\right)$$

donde $x = y + z$ con $y \in Y \;\; z \in Y^{\perp}$

Como $H = Y \oplus Y^{\perp}$ se tiene que P_Y y P_Y son operadores lineales Además como por el Teorema de Pitágoras si $x = y + z$ con $y \in Y \;\; z \in Y^{\perp}$ entonces

$$\left\| x \right\|^2 = \left\| y + z \right\|^2 = \left\| y \right\|^2 + \left\| z \right\|^2$$

se tiene que

$$\left\| P_Y\left(x\right) \right\| \leq \left\| x \right\| \qquad \text{y} \qquad \left\| P_Y \;\left(x\right) \right\| \leq \left\| x \right\|$$

Así pues P_Y y $P_Y{}^{\perp}$ son operadores lineales acotados

$$\left\| P_Y \right\| = \left\| P_Y \;\right\| = 1 \qquad si \;\; Y \neq \left\{ 0 \right\}$$

Además se tiene que

- P_Y y P_Y son suryectivos
- $P_Y = I - P_Y \qquad P_Y \;\; = I - P_Y$ donde $I \;\; H \rightarrow H$ es el operador identidad

- $Ker(P_Y) = Y^{\perp} \quad Ker(P_Y \ ) = Y$
- $P_Y^{\ 2} = P_Y \quad P_Y^{\ \ 2} = P_Y$
- $\langle P_Y(u)\ v \rangle = \langle u \ P_Y(v) \rangle \quad \langle P_Y \ (u)\ v \rangle = \langle u \ P_Y \ (v) \rangle$

es decir $P_Y \ = P_Y$ y $P_{Y^{\perp}} \ = P_Y$

Los resultados anteriores motivan la siguiente definición

Definición 2 3 1 Sean H un espacio de Hilbert y $P \ H \to H$ un operador lineal acotado P es un operador proyección (o una proyección ortogonal) si P es autoadjunto e idempotente o sea que

$$P = P$$

$$P^2 = PP = P$$

Observación Los operadores lineales P_Y y P_Y son operadores proyecciones en el espacio de Hilbert H Además para todo operador proyección P en H se tiene que $Ran(P)$ es un subespacio cerrado de H

Teorema 2 3 1 Sea H un espacio de Hilbert

a) Dado un operador proyección $P \ H \to H$ entonces

$$H = Ker\ (P) \oplus Ran\ (P)$$

b) Si $H = M \oplus M^{\perp}$ donde M es un subespacio cerrado de H entonces la función

$$P_M \quad H \to H$$

$$P_M(x) = m$$

Donde $x = m + n \quad m \in M \quad n \in M^{\perp}$ es un operador proyección Además $Ker\,(P_M) = M^{\perp}$ y $Ran\,(P_M) = M$

Demostración

a) Por el Corolario 1 1 1 sabemos que $Ker\,(P)$ es un subespacio cerrado de H entonces

$$H = Ker\,(P) \oplus (Ker\,(P))^{\perp}$$

Luego por el Teorema 1 2 4 se tiene que

$$Ker\,(P) = (Ran\,(P\ \ ))^{\perp} = (Ran\,(P))^{\perp}$$

y

$$(Ker\,(P))^{\perp} = \left((Ran\,(P))^{\perp}\right)^{\perp} = Ran\,(P)$$

Por lo que

$$H = Ker\,(P) \oplus Ran\,(P)$$

b) Sean $x \quad y \in H \quad \alpha \in \mathbb{R}$ Entonces existen $m_1 \quad m_2 \in M \quad n_1 \quad n_2 \in M^{\perp}$ tales que

$$x = m_1 + n_1 \qquad y = m_2 + n_2$$

Luego

$$x + y = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2) \qquad m_1 + m_2 \in M \text{ , } n_1 + n_2 \in M^{\perp}$$

y

$$\alpha\, x = \alpha\, m_1 + \alpha\, n_1 \qquad \alpha\, m_1 \in M \quad \alpha\, n_1 \in M^{\perp}$$

Por lo cual

$$P_M(x + y) = m_1 + m_2 = P_M(x) + P_M(y)$$

y

$$P_M(\alpha\, x) = \alpha\, m_1 = \alpha\, P_M(x)$$

Así pues P_M es un operador lineal

Probemos que P_M es un operador idempotente En efecto sea $x = m + n \in H$ con $m \in M \quad n \in M^{\perp}$ Entonces

$$P_M^{\ 2}(x) = P_M(P_M(x)) = P_M(m) = m = P_M(x)$$

Lo que implica que $P_M^{\ 2} = P_M$ Así pues P_M es un operador idempotente

Probemos que P_M es un operador autoadjunto Sean

$$x = m_1 + n_1 \qquad y = m_2 + n_2 \text{ con } m_1 \quad m_2 \in M \quad n_1 \quad n_2 \in M^{\perp}$$

Luego

$$\langle P_M(x)\ \ y\rangle = \langle m_1\ \ y\rangle$$

$$= \langle m_1\ \ m_2 + n_2\rangle$$

$$= \langle m_1\ \ m_2\rangle + \langle m_1\ \ n_2\rangle$$

Por hipótesis sabemos que $H = M \oplus M^{\perp}$ luego

$$\langle m_1\ \ n_2\rangle = 0 = \langle n_1\ \ m_2\rangle$$

Luego

$$\langle P_M(x)\ \ y\rangle = \langle m_1\ \ m_2\rangle + \langle n_1\ \ m_2\rangle$$

$$= \langle m_1 + n_1\ \ m_2\rangle$$

$$= \langle x\ \ P_M(y)\rangle$$

De donde P_M es autoadjunto

Finalmente notemos que $Ran(P_M) = M$ y $Ker(P_M) = M^{\perp}$ ya que $H = M \oplus M^{\perp}$

Observación Sean H un espacio de Hilbert y $P\ H \to H$ un operador proyección Denotemos $Y = Ran(P)$ entonces por el Teorema 2 3 1

$$H = Y \oplus Y^{\perp}\quad Y^{\perp} = Ker(P)$$

y si $x = m_1 + m_2$ con $m_1 \in Y$ $m_2 \in Y^{\perp}$ entonces

$$P(x) = P(m_1 + m_2) = P(m_1) + P(m_2) = P(m_1) = m_1$$

En este caso decimos que P proyecta H sobre Y y escribimos

$$P = P_Y$$

Teorema 2 3 2 Sean H un espacio de Hilbert y $P\ H \to H$ un operador lineal P es un operador proyección sí y solo si $I - P$ es un operador proyección donde $I\ H \to H$ es el operador identidad sobre H

Demostración

Note que

$$(I - P)^2 = (I - P)(I - P) = I - 2P + P^2$$

de donde

$$(I - P)^2 = I - P \text{ sí y solo si } P^2 = P$$

Así por el Teorema 1 2 5 se tiene que

$I - P$ es un operador proyección sí y solo si P es un operador proyección

Observación Si $P\ H \to H$ es un operador proyección entonces

$$Ran\,(I-P)=Ker\,(P) \quad y \quad Ker\,(I-P)=Ran\,(P)$$

Por lo tanto si $Y=Ran(P)$ y $Z=Ker\,(P)$ entonces

$$P_Z=I-P_Y$$

Teorema 2 3 3 Sean H un espacio de Hilbert y $P\;H\to H$ un operador proyección Entonces

a) $\langle\, P(x)\;\; x\,\rangle=\|\,P(x)\,\|^2$

b) $P\geq 0$

c) $\|\,P\,\|\leq 1\;\; \|\,P\,\|=1$ si $P\,(H)\neq\{\,0\,\}$

Demostración

Note que

$$\langle\, P(x)\;\; x\,\rangle=\langle\, P^2(x)\;\; x\,\rangle$$

$$=\langle\, P(x)\;\; P(x)\,\rangle$$

$$=\|\,P(x)\,\|^2\geq 0$$

De donde se concluye a) y b)

c) Por la desigualdad de Cauchy-Schwarsz tenemos que

$$\| P(x) \|^2 = \langle P(x) \ P(x) \rangle$$

$$= \langle P^2(x) \ x \rangle$$

$$= \langle P(x) \ x \rangle$$

$$\leq \| P(x) \| \| x \|$$

De donde

$$\frac{\| P(x) \|}{\| x \|} \leq 1 \quad \text{para todo } x \neq 0$$

Luego

$$\| P \| = Sup_{\neq 0} \frac{\| P(x) \|}{\| x \|} \leq 1$$

Por otro lado como $P(x) = x$ para todo $x \in Ran(P)$ se tiene que si $P(H) = Ran(P) \neq \{0\}$ entonces

$$\| P \| = 1$$

Teorema 2 3 4 Sean H un espacio de Hilbert y $P_1 \ H \rightarrow H \quad P_2 \ H \rightarrow H$ operadores proyección Entonces

a) $P = P_1P_2$ es una proyección en H sí y solo sí $P_1P_2 = P_2P_1$ En este caso P proyecta H sobre $Y = Y_1 \cap Y_2$ donde $Y_1 = Ran(P_1)$ y $Y_2 = Ran(P_2)$ es decir

$$P_1P_2 = P_{Y_1 \cap Y_2}$$

b) Dos subespacios cerrados Y y V de H son ortogonales sí y solo si las correspondientes proyecciones satisfacen

$$P_Y P_V = P_V P_Y = 0$$

Demostración

a) Supongamos primeramente que $P_1P_2 = P_2P_1$ Debe probarse que $P = P_1P_2$ es autoadjunto e idempotente En efecto

$$P^2 = (P_1P_2)(P_1P_2) = P_1^2P_2^2 = P_1P_2 = P$$

Por lo cual P es idempotente

Para todo $x \ y \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle P(x) \ \ y \rangle &= \langle P_1P_2(x) \ \ y \rangle \\ &= \langle P_2(x) \ \ P_1(y) \rangle \\ &= \langle x \ \ P_2P_1(y) \rangle \\ &= \langle x \ \ P_1P_2(y) \rangle \\ &= \langle x \ \ P(y) \rangle\end{aligned}$$

De donde P es autoadjunto Por todo lo anterior se tiene que P es un operador proyección

Supongamos ahora que $P = P_1 P_2 \quad H \to H$ es un operador proyección Entonces

$$P = P$$

Luego como $P_1 \; y \; P_2$ son autoadjuntos

$$P_1 P_2 = P = P \quad = \left(P_1 P_2\right) \quad = P_2 \; P_1 \quad = P_2 P_1$$

De donde

$$P = P_1 P_2 = P_2 P_1$$

Por otro lado si $P = P_1 P_2 = P_2 P_1$ es un operador proyección entonces para todo $x \in H$ se tiene que

$$P\left(x\right) = P_1\left(P_2\left(x\right)\right) \in Ran\left(P_1\right) = Y_1$$

y

$$P\left(x\right) = P_2\left(P_1\left(x\right)\right) \in Ran\left(P_2\right) = Y_2$$

Por lo tanto

$$P\left(x\right) \in Ran\left(P_1\right) \cap Ran\left(P_2\right) = Y_1 \cap Y_2 = Y$$

Así

$$Ran(P) \subseteq Y_1 \cap Y_2 = Y$$

Recíprocamente si $y \in Y$ entonces

$$y \in Y_1 \quad , \quad y \in Y_2$$

de donde

$$P_1(y) = y \quad P_2(y) = y$$

y

$$P(y) = (P_1P_2)(y) = P_1(P_2(y)) = P_1(y) = y$$

Así $y \in Ran(P)$ y $Y \subseteq Ran(P)$

De todo lo anterior se tiene que

$$Y = Y_1 \cap Y_2 = Ran(P_1) \cap Ran(P_2) = Ran(P)$$

Por consiguiente

$$P = P_Y = P_{Y_1 \cap Y_2}$$

b) Supongamos que $Y \perp V$ entonces

$$Y \cap V = \{0\}, V \subset Y^{\perp}, Y \subset V^{\perp}$$

Además

$$Ran(P_Y) = Y \quad Ker(P_Y) = Y^{\perp} \quad Ran(P_V) = V \quad Ker(P_V) = V^{\perp}$$

Luego

$$V \subset Ker\,(P_Y) \quad y \quad Y \subset Ker\,(P_V)$$

Por lo cual para todo $x \in H$ se tiene que

$$(P_Y P_V)(x) = P_Y(P_V(x)) = 0 \quad \text{y} \quad (P_V P_Y)(x) = P_V(P_Y(x)) = 0$$

de donde

$$(P_Y P_V)(x) = (P_V P_Y)(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in H$$

Así pues $P_Y P_V = P_V P_Y = 0$

Supongamos ahora que $P_Y P_V = P_V P_Y = 0$ Sean $y \in Y$ $v \in V$ luego

$$\langle\, y \quad v \,\rangle = \langle\, P_Y(y) \quad P_V(v) \,\rangle = \langle\, (P_V P_Y)(y) \quad v \,\rangle = \langle\, 0 \quad v \,\rangle = 0$$

Por lo cual $Y \perp V$

Teorema 2 3 5 Sean $P_1 \;\; H \to H$ y $P_2 \;\; H \to H$ dos proyecciones en el espacio de Hilbert H Entonces

a) La suma $P = P_1 + P_2$ es una proyección en H sí y solo si $Y_1 = Ran\,(P_1)$ y $Y_2 = Ran\,(P_2)$ son ortogonales

b) Si $P = P_1 + P_2$ es una proyección entonces P proyecta H sobre $Y_1 \oplus Y_2$

Demostración

a) Supongamos que $P = P_1 + P_2$ es una proyección entonces $P = P^2$ Luego

$$P = P_1 + P_2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2$$

Por ser P_1 y P_2 proyecciones se tiene que

$$P_1 + P_2 = P_1 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2$$

Así que

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 0$$

Multiplicando a la izquierda de la ecuación anterior por P_2 se obtiene que

$$P_2P_1P_2 + P_2^2P_1 = 0$$

Multiplicando esta ultima ecuación por P_2 a la derecha se obtiene

$$P_2P_1P_2^2 + P_2^2P_1P_2 = 0$$

Luego

$$P_2P_1P_2 + P_2P_1P_2 = 0$$

Es decir

$$P_2P_1P_2 = 0$$

Pero como

$$P_2P_1P_2 + P_2P_1 = 0$$

se tiene que

$$P_2P_1 = 0$$

De manera similar se prueba que $P_1P_2 = 0$ Luego por el Teorema 2 3 4 (b) se tiene que $Y_1 = Ran\left(P_1\right)$ es ortogonal a $Y_2 = Ran\left(P_2\right)$

Supongamos ahora que $Y_1 \perp Y_2$ entonces por el Teorema 2 3 4 (b) se tiene que

$$P_1P_2 = P_2P_1 = 0$$

Luego

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 0$$

Sumando $P_1 + P_2$ en ambos miembros obtenemos

$$P_1 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2 = P_1 + P_2$$

$$P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 = P_1 + P_2$$

De donde

$$(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2$$

Esto es

$$P^2 = P$$

Luego P es idempotente

Por otro lado para todo $x \quad y \in H$ se tiene que

$$\langle (P_1 + P_2)(x) \quad y \rangle = \langle P_1(x) + P_2(x) \quad y \rangle$$

$$= \langle P_1(x) \quad y \rangle + \langle P_2(x) \quad y \rangle$$

$$= \langle x \quad P_1(y) \rangle + \langle x \quad P_2(y) \rangle$$

$$= \langle x \quad P_1(y) + P_2(y) \rangle$$

$$= \langle x \quad (P_1 + P_2)(y) \rangle$$

De donde $P = P_1 + P_2$ es autoadjunto

De todo lo anterior se tiene que $P = P_1 + P_2$ es una proyección

b) Supongamos que $P = P_1 + P_2$ es una proyección Luego por la parte (a) se tiene que $Y_1 \perp Y_2$ Sea $x \in H$ entonces

$$y = P(x) = (P_1 + P_2)(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

Con $P_1(x) \in Y_1$ y $P_2(x) \in Y_2$ Así $y \in Y_1 \oplus Y_2$ De donde $Ran(P) \subset Y_1 \oplus Y_2$

Probemos que $Y_1 \oplus Y_2 \subset Ran(P)$ En efecto sea $v \in Y_1 \oplus Y_2$ entonces existen $y_1 \in Y_1 \quad y_2 \in Y_2$ tal que

$$v = y_1 + y_2$$

Luego como $Y_1 \perp Y_2$ se tiene que

$$P(v) = P(y_1 + y_2)$$

$$= P_1(y_1 + y_2) + P_2(y_1 + y_2)$$

$$= P_1(y_1) + P_1(y_2) + P_2(y_1) + P_2(y_2)$$

$$= P_1(y_1) + P_2(y_2)$$

$$= y_1 + y_2$$

$$= v$$

Lo que implica que $v \in Ran(P)$ Así $Y_1 + Y_2 \subset Ran(P)$

Por lo tanto

$$Ran\,(P) = Y_1 \oplus Y_2 \quad \text{y} \quad P_{Ran(P)} = P_{Y_1 \oplus Y_2} = P_{Ran(P_1) \oplus Ran(P_2)}$$

Observación El opuesto de un operador proyección no es un operador proyección Pues si $P(x)$ es un operador proyección entonces para el operador opuesto de P $Q(x) = -P(x)$ se tiene que $Q^2(x) = P^2(x) = P(x) \neq Q(x)$ Así Q no es idempotente si $Q \neq 0$

Teorema 2 3 6 Sean P_1 y P_2 proyecciones definidas en un espacio de Hilbert H Entonces los siguientes enunciados son equivalentes

a) $P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$

b) $\| P_1(x) \| \leq \| P_2(x) \|$ para todo $x \in H$

c) $P_1 \leq P_2$

d) $Ker\,(P_2) \subset Ker\,(P_1)$

e) $Ran(P_1) \subset Ran(P_2)$

Demostración

a $\Rightarrow$ b) Como P_1 es una proyección por el Teorema 2 3 3 tenemos que $\| P_1 \| \leq 1$

Luego por hipótesis se tiene que

$$\| P_1(x) \| = \| P_1P_2(x) \| \leq \| P_1 \| \| P_2(x) \| \leq \| P_2(x) \| \quad \text{para todo } x \in H$$

b$\Rightarrow$c) Como P_1 y P_2 son proyecciones sobre H para todo $x \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle P_1(x) \;\; x \rangle &= \langle P_1^2(x) \;\; x \rangle \\ &= \langle P_1(x) \;\; P_1(x) \rangle \\ &= \| P_1(x) \|^2 \\ &\leq \| P_2(x) \|^2 \end{aligned}$$

$$\langle P_1(x) \ \ x \rangle \leq \langle P_2(x) \ \ P_2(x) \rangle$$

$$= \langle P_2^{\,2}(x) \ \ x \rangle$$

$$= \langle P_2(x) \ \ x \rangle$$

De donde $P_1 \leq P_2$

c $\Rightarrow$ d) Sea $x \in Ker\,(P_2)$ entonces $P_2(x) = 0$ Luego por hipótesis

$$\|P_1(x)\|^2 = \langle P_1(x) \ \ P_1(x) \rangle$$

$$= \langle P_1^{\,2}(x) \ \ x \rangle$$

$$= \langle P_1(x) \ \ x \rangle$$

$$\leq \langle P_2(x) \ \ x \rangle$$

$$= \langle 0 \ \ x \rangle \qquad \text{pues } x \in Ker\,(P_2)$$

$$= 0$$

De donde $P_1(x) = 0$ Así $x \in Ker\,(P_1)$ y

$$Ker\,(P_2) \subset Ker\,(P_1)$$

d $\Rightarrow$ e) Sabemos que $Ker\,(P_1)\, y\, Ker\,(P_2)$ son los complementos ortogonales de $Ran\,(P_1)$ y $Ran\,(P_2)$ respectivamente Además por hipótesis se tiene que

$$(Ran(P_2))^{\perp} = Ker\,(P_2) \subset Ker\,(P_1) = (Ran(P_1))^{\perp}$$

Por lo tanto

$$Ran(P_1) \subset Ran(P_2)$$

e $\Rightarrow$ a) Sea $x \in H$ entonces $P_1(x) \in Ran\,(P_1) \subset Ran\,(P_2)$ Por lo tanto

$$P_2(P_1(x)) = P_1(x)$$

Así $P_2P_1 = P_1$ es decir P_2P_1 es una proyección Luego por el Teorema 2 3 4 (a) se tiene que

$$P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$$

Teorema 2 3 7 Sean P_1 y P_2 proyecciones en un espacio de Hilbert H y $Y_1 = Ran\,(P_1)$ $Y_2 = Ran\,(P_2)$ Entonces

a) $P = P_2 - P_1$ es una proyección en H si y solo si $Y_1 \subset Y_2$

b) Si $P = P_2 - P_1$ es una proyección entonces

$$Ran\,(P) = Y_1^{\perp} \cap Y_2$$

y por lo tanto

$$P = P_{Y_1 \cap Y_2}$$

Demostración

a) Si $P = P_2 - P_1$ es una proyección entonces

$$P = P_2 - P_1$$

$$= (P_2 - P_1)^2$$

$$= P_2^2 - P_2P_1 - P_1P_2 + P_1^2$$

$$= P_2 \quad - P_2P_1 - P_1P_2 + P_1$$

Luego

$$P_2 - P_1 = P_2 \quad - P_2P_1 - P_1P_2 + P_1$$

y

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 2P_1 \qquad (1)$$

Multiplicando (1) por P_2 a izquierda y a derecha respectivamente obtenemos

$$P_2P_1P_2 + P_2P_1 = 2P_2P_1 \qquad \text{y} \qquad P_1P_2 + P_2P_1P_2 = 2P_1P_2$$

Luego

$$P_2P_1P_2 = P_2P_1 \quad \text{y} \quad P_2P_1P_2 = P_1P_2$$

De donde

$$P_2P_1 = P_1P_2 \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que

$$2P_2P_1 = 2P_1$$

Así P_2P_1 es una proyección Por el Teorema 2 3 4 (a) se tiene que

$$P_2P_1 = P_1P_2 = P_1 \qquad (3)$$

Luego por el Teorema 2 3 6 tenemos que $Y_1 \subset Y_2$

Recíprocamente supongamos que $Y_1 \subset Y_2$ Entonces por el Teorema 2 3 6 se tiene que

$$P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$$

lo que implica que

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 2P_1$$

Por consiguiente

$$P^2 = (P_2 - P_1)^2 = P_1 - P_2P_1 - P_1P_2 + P_2 = P_2 - P_1 = P$$

Además como P_1 y P_2 son proyecciones entonces son autoadjuntos por lo tanto también lo es su diferencia $P = P_2 - P_1$ Así pues P es una proyección

b) Supongamos que $P = P_2 - P_1$ es una proyección Entonces por la parte (a) se tiene que $Y_1 \subset Y_2$ Luego por el Teorema 2 3 6

$$P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$$

Sea $y \in Y = Ran(P)$ entonces existe un $x \in H$ tal que

$$y = P(x) = P_2(x) - P_1(x) \qquad (4)$$

Por lo tanto

$$P_2(y) = P_2^2(x) - P_2P_1(x)$$

$$= P_2(x) - P_1(x)$$

$$= y$$

Lo que implica que $y \in Y_2$ Por lo tanto

$$Y = Ran\,(P) \subset Y_2$$

Por otra parte al aplicar P_1 a (4) se obtiene

$$P_1(y) = P_1P_2(x) - P_1^2(x)$$

$$= P_1(x) - P_1(x)$$

$$= 0$$

De donde

$$y \in Ker\,(P_1) = Y_1$$

Así pues

$$Y = Ran\,(P) \subset Y_1^{\perp}$$

Por consiguiente

$$Y \subset Y_1^{\perp} \cap Y_2$$

Sea $y \in Y_1^{\perp} \cap Y_2$ Como

$$Y_1^{\perp} = Ran(P_1)^{\perp} = Ker(P_1) = Ran(I - P_1)$$

existe un $y_2 \in H$ tal que

$$y = (I - P_1)(y_2) = y_2 - P_1(y_2)$$

Luego como $P_1(y_2) \in Y_1 \subset Y_2$ se tiene que $y_2 = y + P_1(y_2) \in Y_2$

Ahora bien como $P_2 P_1 = P_1$ se tiene que

$$P(y) = P((I - P_1)(y_2))$$

$$= (P_2 - P_1)(I - P_1)(y_2)$$

$$= (P_2 - P_2 P_1 - P_1 + P_1^2)(y_2)$$

$$= (P_2 - P_1)(y_2)$$

$$= P_2(y_2) - P_1(y_2)$$

$$= y_2 - P_1(y_2)$$

$$= (I - P_1)(y_2)$$

$$P(y) = y$$

De donde $y \in Y$ Por lo tanto

$$Y_1^{\perp} \cap Y_2 \subset Y$$

Así pues

$$Y = Ran\,(P) = Y_1^{\perp} \cap Y_2$$

y

$$P = P_{Y \cap Y_2}$$

Corolario 2 3 1 Sean R y K subespacios cerrados del espacio de Hilbert H y sean P_R y P_K las correspondientes proyecciones sobre H de estos subespacios

a) $P = P_R - P_K$ es una proyección sobre H sí y solo si $P_R \leq P_K$

b) Si $P_R P_K = P_K P_R$ entonces $P_R + P_K - P_R P_K$ es una proyección y $Ran\,(P_R + P_K - P_R P_K) = R \oplus (R^{\perp} \cap K)$

Demostración

a) Se deduce inmediatamente de los Teoremas 2 3 6 y 2 3 7

b) Note que

$$P_R + P_K - P_R P_K = P_R + (I - P_R) P_K$$

y

$$P_R(I-P_R)P_K=\left(P_R-P_R^{\,2}\right)P_K=(P_R-P_R)P_K=0$$

Además como

$$(I-P_R)P_K=P_K-P_RP_K=P_K-P_KP_R=P_K(I-P_R)$$

Por el Teorema 2 3 4 se tiene que P_R y $(I-P_R)P_K$ son proyecciones ortogonales entre sí es decir

$$Ran(P_R)\perp Ran((I-P_R)P_K)$$

Además

$$Ran((I-P_R)P_K)=Ran(I-P_R)\cap Ran(P_K)=(Ran(P_R))^{\perp}\cap Ran(P_K)$$

Ahora bien por el Teorema 2 3 5 $P_R+(I-P_R)P_K=P_R+P_K-P_RP_K$ es una proyección y

$$\begin{aligned}Ran(P_R+P_K-P_RP_K)&=Ran(P_R+(I-P_R)P_K)\\&=Ran(P_R)\oplus Ran((I-P_R)P_K)\\&=Ran(P_R)\oplus(Ran(P_R))^{\perp}\cap Ran(P_K)\\&=R\oplus\left(R^{\perp}\cap K\right)\end{aligned}$$

Teorema 2 3 8 Sea $\{P\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona creciente de proyecciones definidas en un espacio de Hilbert H Entonces

a) $\{ P \}_{n=1}^{\infty}$ converge fuertemente a una proyección es decir $P(x) \rightarrow P(x)$ para cada $x \in H$ y el operador límite es una proyección definida en H

b) $Ran(P) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Ran(P)}$

c) $Ker(P) = \bigcap_{1}^{\infty} Ker(P)$

Demostración

a) Sea $m < n$ luego por hipótesis $P_m < P$ Así por el Teorema 2 3 6

$$Ran(P_m) \subset Ran(P)$$

Por el Teorema 2 3 7 se tiene que $P - P_m$ es una proyección Luego para todo $x \in H$

$$\| P(x) - P_m(x) \|^2 = \| (P - P_m)(x) \|^2$$

$$= \langle (P - P_m)(x) \ (P - P_m)(x) \rangle$$

$$= \langle (P - P_m)(x) \ (x) \rangle$$

$$= \langle P(x), (x) \rangle - \langle P_m(x) \ (x) \rangle$$

$$= \langle P^2(x), (x) \rangle - \langle P_m^2(x) \ (x) \rangle$$

$$= \langle P(x), P_n(x) \rangle - \langle P_m(x) \ P_m(x) \rangle$$

$$\| P (x) - P_m (x) \|^2 = \| P (x) \|^2 - \| P_m (x) \|^2 \qquad (1)$$

Sabemos que $\| P \| \leq 1$ por lo cual $\| P(x) \| \leq \| x \|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ Luego $\{ \| P (x) \| \}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de numeros reales acotada Por el Teorema 2 3 6 $\{ \| P (x) \| \}_{n=1}^{\infty}$ es también monótona ya que la sucesión $\{ P \}_{n=1}^{\infty}$ es monótona Lo que implica que la sucesión $\{ \| P (x) \| \}_{n=1}^{\infty}$ converge en $\mathbb{R}$ y así por (1) la sucesión $\{ P (x) \}^{\infty}{}_{1}$ es una sucesión de Cauchy en H Puesto que H es completo la sucesión $\{ P (x) \}_{n=1}^{\infty}$ converge en H esto es existe un $y_x \in H$ tal que

$$lim_{\to\infty} P (x) = y$$

Definamos la función

$$P \quad H \to H$$

$$P(x) = lim_{n\to\infty} P_n (x) = y$$

Probemos que P es una proyección En efecto

1) Sean $x \quad y \in H$ y $\alpha \quad \beta \in \mathbb{R}$ Entonces

$$P(\alpha\, x + \beta\, y) = lim_{n\to\infty} P\, (\alpha\, x + \beta\, y)$$

$$= lim_{n\to\infty} (\alpha\, P\, (x) + \beta\, P_n (y))$$

$$= \alpha\, lim_{n\to\infty} P\, (x) \; + \beta\, lim_{n\to\infty} P\, (y)$$

$$P(\alpha x+\beta y) = \alpha P(x)+\beta P(y)$$

2) Sea $x \in H$ entonces

$$\|P(x)\| = \|lim_{n\to\infty} P(x)\|$$

$$= lim_{\to\infty} \|P(x)\|$$

$$\leq lim_{n\to\infty} \|P\| \|x\|$$

$$\leq lim_{n\to\infty} \|x\|$$

$$= \|x\|$$

3) Sean $x \quad y \in H$ Entonces

$$\langle P(x) \quad y \rangle = \langle lim_{\to\infty} P(x) \quad y \rangle$$

$$= lim_{n\to\infty} \langle P(x) \quad y \rangle$$

$$= lím_{n\to\infty} \langle x \quad P(y) \rangle$$

$$= \langle x \quad lim_{n\to\infty} P(y) \rangle$$

$$= \langle x \quad P(y) \rangle$$

4) Sea $x \in H$ entonces como P es un operador lineal acotado

$$P^2(x) = P(P(x))$$

$$P^2(x) = P\left(\lim_{n\to\infty} P\ (x)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(P\ (x)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty} P_m\left(P\ (x)\right)\right]$$

Ahora bien como m tiende al infinito podemos suponer que $n \leq m$ Luego como $P\ \leq P_m$ por el Teorema 2 3 6 se tiene que $P\ P_m = P_m P\ = P$ Por lo tanto

$$P^2(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(P_m P\ )(x)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} P\ (x)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ P\ (x)$$

$$= P(x)$$

Por todo lo anterior se tiene que P es una proyección

b) Determinemos $Ran(P)$ Para ello sea $m < n$ Entonces $P_m \leq P$ esto es $P\ - P_m \geq 0$ y

$$\left\langle (P\ - P_m)(x)\ \ x \right\rangle \geq 0 \quad x \in H$$

Haciendo tender n al infinito obtenemos por la continuidad del producto interno que

$$\left\langle (P - P_m)(x)\ \ x \right\rangle \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H$$

esto es $P_m \leq P$ Luego por el Teorema 2 3 6 se tiene que $Ran(P_m) \subset Ran(P)$ para todo m De donde

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} Ran(P_m) \subset Ran(P)$$

Luego como $Ran(P)$ es un subespacio cerrado de H

$$\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} Ran(P_m)} \subset Ran(P)$$

Sea $x \in H$ Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$P_m(x) \in Ran(P_m) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} Ran(P_m)$$

Luego como

$$\lim_{m \to \infty} P_m(x) = P(x)$$

se tiene que

$$P(x) \in \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} Ran(P_m)}$$

por lo tanto

$$Ran(P) \subset \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} Ran(P_m)}$$

Así pues

$$Ran(P)=\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} Ran(P_m)}$$

c) Como P es una proyección por el Teorema 1 2 4 se tiene que

$$Ker(P)=(Ran(P))^{\perp}\subset Ran(P)^{\perp}=Ker(P)$$

para todo $n\in\mathbb{N}$ Por lo tanto

$$Ker(P)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty} Ker(P)$$

Sea $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty} Ker(P)$ entonces $x\in Ker(P)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ De donde $P(x)=0$

Como $P(x)\rightarrow P(x)$ se tiene que $P(x)=0$ por lo cual $x\in Ker(P)$ Por lo tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Ker(P)\subset Ker(P)$$

Así pues

$$Ker(P)=\bigcap_{n=1}^{\infty} Ker(P)$$

Finalizamos este capítulo probando que los límites uniformes de sucesiones de proyecciones es también una proyección

Teorema 2 3 9 Sea $\{P\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de proyecciones definidas en el espacio de Hilbert complejo H y supongamos que la sucesión $\{P\}_{n=1}^{\infty}$ converge en norma al operador lineal acotado $P\ H\rightarrow H$ o sea que

$$lím_{\to\infty}\| P - P \| = 0$$

Entonces P es una proyección en H

Demostración

Sea $x \in H$ entonces

$$\| (P - P)(x) \| \leq \| P - P \| \| x \|$$

Por lo tanto

$$lim_{n\to\infty} P(x) = P(x)$$

Por hipótesis cada P es una proyección por lo cual

$$\langle P(x) \;\; y \rangle = \langle x \;\; P(y) \rangle$$

Aplicando límite cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$\langle P(x) \;\; y \rangle = \langle x \;\; P(y) \rangle \text{ para todo } x \;\; y \in H$$

Por lo tanto P es autoadjunto

Por otro lado para todo $x \in H$

$$\langle P(x) \; x \rangle = \langle lim_{\to\infty} P(x) \; x \rangle$$

$$= lim_{n\to\infty} \langle P(x) \; x \rangle$$

$$= lím_{n\to\infty} \langle P^2(x) \; x \rangle$$

$$\langle P(x)\ \ x\rangle = lim_{n\to\infty}\langle P\ (x)\ \ P\ (x)\rangle$$

$$= \langle lim_{n\to\infty} P\ (x)\ \ lim_{n\to\infty} P\ (x)\rangle$$

$$= \langle P(x)\ \ P(x)\rangle$$

$$= \langle P^2(x)\ \ x\rangle$$

Luego como H es un espacio de Hilbert complejo se tiene que

$$P(x) = P^2(x) \text{ para todo } x \in H$$

Así pues P es una proyección

CAPÍTULO III

PROYECCIONES A-AUTOADJUNTAS EN ESPACIOS DE HILBERT

III. Proyecciones A-autoadjuntas en espacios de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $B(H)^{+}$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales acotados positivos en H El tema central de este capítulo radica en definir una forma sesquilineal acotada y no negativa

$$\langle\ \ \rangle_{A}\ H\times H\rightarrow\mathbb{C}$$

asociado al operador $A\in B(H)^{+}$ y estudiar la nueva ortogonalidad inducida por este semiproducto así como los operadores A-autoadjuntos respecto a la forma sesquilineal definida por el operador $A\in B(H)^{+}$

3 1 Operadores A-adjuntos

Dado un operador $A\in B(H)$ consideremos la función

$$\langle\cdot\ \ \rangle_{A}\ H\times H\rightarrow\mathbb{C}$$

$$\langle x\ z\rangle_{A}=\langle A(x)\ z\rangle \quad \text{con } x\ z\in H$$

Note que como $A\in B(H)^{+}$ entonces

- $\langle x+y\ z\rangle_{A}=\langle x\ z\rangle_{A}+\langle y\ z\rangle_{A}$
- $\langle \alpha x\ z\rangle_{A}=\alpha\langle x\ z\rangle_{A}$
- $\overline{\langle x\ z\rangle_{A}}=\langle z\ x\rangle_{A}$

- Por el Teorema 2.2.1

$$\langle x\ x\rangle_A = \langle A(x)\ x\rangle$$

$$= \left\langle A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}(x)\ x\right\rangle$$

$$= \left\langle A^{\frac{1}{2}}(x)\ A^{\frac{1}{2}}(x)\right\rangle$$

$$= \left\|A^{\frac{1}{2}}(x)\right\|$$

$$\geq 0$$

- $\langle x\ x\rangle_A = 0 \Leftrightarrow \left\|A^{\frac{1}{2}}(x)\right\| = 0$

$$\Leftrightarrow A^{\frac{1}{2}}(x) = 0$$

- Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\langle x\ z\rangle_A\right| = \left|\langle A(x)\ z\rangle\right|$$

$$\leq \|A(x)\|\|z\|$$

$$\leq \|A\|\|x\|\|z\|$$

Por lo tanto $\langle\ \ \rangle_A$ es una forma sesquilineal acotada y no negativa

Note que $\langle \ \rangle_A$ no es un producto interno sobre H sin embargo si A es inyectivo entonces $\langle \ \rangle_A$ es un producto interno sobre H ya que por el Teorema 2 2 3 $Ker(A) = Ker\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$

Teorema 3 1 1 Sea $A \in B(H)$ invertible Entonces $\langle \ \rangle_A$ es un producto interno equivalente a $\langle \ \rangle$

Demostración

Como A es inyectivo se tiene que $\langle \ \rangle_A$ es un producto interno sobre H Probemos que $\langle \ \rangle_A$ es equivalente a $\langle \ \rangle$ En efecto

$$\| x \|^2_A = \langle x \ x \rangle_A = \langle A(x) \ x \rangle \leq \|A\| \|x\|^2$$

de donde

$$\| x \|_A \leq \|A\|^{\frac{1}{2}} \|x\|$$

Por otro lado como $A \in B(H)$

$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle A(x) \ x \rangle \in \sigma(A)$$

donde $\sigma(A)$ es el espectro de A Como A es invertible $0 \notin \sigma(A)$

Por lo tanto

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle A(x)\ x \rangle > 0$$

Sea $x \in H$ $x \neq 0$ entonces

$$m \leq \left\langle \frac{A(x)}{\|x\|}\ \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \frac{1}{\|x\|^2} \langle A(x)\ x \rangle = \frac{1}{\|x\|^2} \langle x\ x \rangle_A$$

de donde

$$m\|x\|^2 \leq \|x\|^2{}_A$$

y

$$m^{\frac{1}{2}} \|x\| \leq \|x\|_A$$

Así pues

$$m^{\frac{1}{2}} \|x\| \leq \|x\|_A \leq \|A\|^{\frac{1}{2}} \|x\|$$

Para todo $x \in H$ Por lo tanto $\langle\ \ \rangle_A$ y $\langle\ \ \rangle$ son equivalentes

Definición 3 1 1 Sean $A \in B(H)$ y $S \subseteq H$ $S \neq \varnothing$ El A-ortogonal de S se denota por $S^{\perp}$ y se define por

$$S^{\perp} = \{ x \in H\ \langle x\ z \rangle_A = 0 \ \textit{para todo}\ z \in S \}$$

$$= \{ x \in H\ \langle A(x)\ z \rangle = 0 \ \textit{para todo}\ z \in S \}$$

Puede verificarse que $S^{\perp A}$ es un subespacio cerrado de H

Teorema 3 1 2 Sean $A \in B(H)^{+}$ y $S \subseteq H$ $S \neq \varnothing$ Entonces

$$S^{\perp} = A^{-1}\left(S^{\perp}\right) = A(S)^{\perp}$$

Demostración

Note que

$$A^{-1}(S^{\perp}) = \left\{ x \in H \ \ \textit{existe}\ y \in S^{\perp} \ \ A(x) = y \right\}$$

$$= \left\{ x \in H \ \ A(x) \in S^{\perp} \right\}$$

Luego si $x \in A^{-1}\left(S^{\perp}\right)$ entonces para todo $z \in S$ se tiene que

$$\langle x \ z \rangle_{A} = \langle A(x) \ z \rangle = 0$$

por lo tanto $x \in S^{\perp}$ Así

$$A^{-1}\left(S^{\perp}\right) \subset S^{\perp}$$

De igual manera si $x \in S^{\perp}$ entonces para todo $z \in S$ se tiene que

$$\langle A(x) \ z \rangle = \langle x \ z \rangle_{A} = 0$$

por consiguiente $A(x) \in S^{\perp}$ es decir $x \in A^{-1}\left(S^{\perp}\right)$ Así

$$S^{\perp} \subset A^{-1}\left(S^{\perp}\right)$$

De todo lo anterior se tiene que

$$A^{-1}\left(S^{\perp}\right)=\left\{x \in H \; A(x) \in S^{\perp}\right\}=S^{\perp}$$

Por otro lado

$$\left(A(S)\right)^{\perp}=\left\{x \in H \; \langle x \; y\rangle=0 \; para\; todo \; y \in \left(A(S)\right)\right\}$$

$$=\left\{x \in H \; \langle x \; A(z)\rangle=0 \; para\; todo \; z \in S\right\}$$

$$=\left\{x \in H \; \langle A(x) \; z\rangle=0 \; para\; todo \; z \in S\right\}$$

$$=\left\{x \in H \; \langle x \; z\rangle_{A}=0 \; para\; todo \; z \in S\right\}$$

$$=S^{\perp}$$

Así pues

$$S^{\perp}=A^{-1}\left(S^{\perp}\right)=A(S)^{\perp}$$

Observación

Del Teorema 3 1 1 se deduce que si $A \in B(H)$ es invertible entonces todo subespacio cerrado Y de H admite un A-complemento en el subespacio de Hilbert $\left(H \; \langle \;\; \rangle_{A}\right)$ a saber $Y^{\perp}$ así $H=Y \oplus Y^{\perp A}$ Sin embargo si A no es invertible tal complemento puede no existir lo cual se justifica en el siguiente teorema

Teorema 3 1 3 Sean $A \in B(H)$ y Y un subespacio de H entonces

$$Y \cap Y^{\perp} = Y \cap Ker(A)$$

Demostración

$$x \in Y \cap Y^{\perp A} \Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad x \in Y^{\perp}$$

$$\Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad \langle x\ z \rangle_A = 0 \quad \forall z \in Y$$

$$\Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad \langle A(x)\ z \rangle = 0 \quad \forall z \in Y$$

$$\Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad \langle A(x)\ x \rangle = 0$$

$$\Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad \left\langle A^{\frac{1}{2}}(x)\ A^{\frac{1}{2}}(x) \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad \left\| A^{\frac{1}{2}}(x) \right\| = 0$$

$$\Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad A^{\frac{1}{2}}(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad x \in Ker\left(A^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$x \in Y \cap Y^{\perp A} \Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad x \in Ker(A)$$

$$\Rightarrow x \in Y \cap Ker(A)$$

De igual manera

$$x \in Y \cap Ker(A) \Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad x \in Ker(A)$$

$$\Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad A(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad \langle A(x)\ z\rangle = 0 \ \ \forall z \in Y$$

$$\Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad \langle x\ z\rangle_A = 0 \ \ \forall z \in Y$$

$$\Rightarrow x \in Y \quad \text{y} \quad x \in Y^{\perp}$$

$$\Rightarrow x \in Y \cap Y^{\perp}$$

Así pues

$$Y \cap Y^{\perp} = Y \cap Ker(A)$$

Definición 3 1 2 Sean $A \in B(H)^{+}$ y $L \in B(H)$ Un operador $W \in B(H)$ es un A adjunto de L si

$$\langle L(x)\ y\rangle_A = \langle x\ W(y)\rangle_A$$

para todo $x\ \ y \in H$

Teorema 3 1 4 Sean $A\in B(H)$ y $L\ W\in B(H)$ W es un A adjunto de L si y sólo sí $L^{*}A=AW$

Demostración

W es A adjunto de L $\Leftrightarrow\langle L(x)\ y\rangle_A=\langle x\ W(y)\rangle_A$ para todo $x\ y\in H$

$$\Leftrightarrow\langle A(L(x))\ y\rangle=\langle A(x)\ W(y)\rangle \quad \text{para todo } x\ y\in H$$

$$\Leftrightarrow\langle AL(x)\ y\rangle-\langle A(x)\ W(y)\rangle=0 \quad \text{para todo } x\ y\in H$$

$$\Leftrightarrow\left\langle x\ (AL)^{*}(y)\right\rangle-\langle x\ A(W(y))\rangle=0 \quad \text{para todo } x\ y\in H$$

$$\Leftrightarrow\langle x\ L^{*}A(y)\rangle-\langle x\ AW(y)\rangle=0 \quad \text{para todo } x\ y\in H$$

$$\Leftrightarrow\langle x\ (L^{*}A-AW)(y)\rangle=0 \quad \text{para todo } x\ y\in H$$

$$\Leftrightarrow(L^{*}A-AW)(y)=0 \quad \text{para todo } y\in H$$

$$\Leftrightarrow L^{*}A(y)=AW(y) \quad \text{para todo } y\in H$$

$$\Leftrightarrow L^{*}A=AW$$

Así pues W es un A adjunto de L si y solo si $L^{*}A=AW$

Observación Si $A\in B(H)$ es invertible entonces por el Teorema 3 1 4 todo operador $L\in B(H)$ posee un A-adjunto el cual es $W=A^{-1}L^{*}A$ Sin embargo si A es no invertible no podemos garantizar la existencia de operadores A adjuntos En lo que sigue estudiaremos la existencia de operadores A-adjuntos

El siguiente teorema nos ayuda a caracterizar la existencia de un operador A adjunto

Teorema 3 1 5 (Teorema de Douglas) Sean $A\ B \in B(H)$ Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

a) Existe un $D \in B(H)$ tal que $AD = B$

b) $Ran(B) \subseteq Ran(A)$

c) Existe un numero real positivo λ tal que $BB \leq \lambda AA$

Si una de estas condiciones es satisfecha entonces existe un unico operador $X \in B(H)$ tal que

$$AX = B \quad Ker(X) = Ker(B)\ y\ Ran(X) \subset Ker(A)^{\perp}$$

Más aun

$$\| X \|^2 = inf \{ \lambda \in \mathbb{R} \quad BB \leq \lambda AA \}$$

X es llamado la **solución reducida** de la ecuación $AX = B$

Demostración

$a \Rightarrow b$)Es obvia

$b \Rightarrow a$)Supongamos que $Ran(B) \subseteq Ran(A)$ Sea $x \in H$ entonces $B(x) \in Ran(A)$ Luego existe un $z \in H$ tal que $B(x) = A(z)$ Como $z \in H = Ker(A) \oplus Ker(A)^{\perp}$ existe un $y \in Ker(A)^{\perp}$ tal que $A(z) = A(y)$ Por lo tanto

$$B(x) = A(y)$$

Probemos que este y es unico En efecto supongamos que existe otro $y_1 \in Ker(A)^{\perp}$ tal que $B(x) = A(y_1)$ Entonces

$$A(y - y_1) = A(y) - A(y_1) = B(x) - B(x) = 0$$

por lo tanto

$$y - y_1 \in Ker(A) \cap Ker(A)^{\perp} = \{0\}$$

de donde $y = y_1$

En base a lo probado anteriormente podemos definir la función

$$D \quad H \to H$$

$$D(x) = y \quad \text{donde } y \in Ker(A)^{\perp} \text{ y } B(x) = A(y)$$

- D es lineal

Sean $x_1 \; x_2 \in H$ entonces existe $y_1 \; y_2 \in Ker(A)^{\perp}$ tal que $B(x_1) = A(y_1)$ y $B(x_2) = A(y_2)$ Por lo tanto $y_1 + y_2 \in Ker(A)^{\perp}$ y

$$B(x_1 + x_2) = B(x_1) + B(x_2) = A(y_1) + A(y_2) = A(y_1 + y_2)$$

Por consiguiente

$$D(x_1+x_2)=y_1+y_2=D(x_1)+D(x_2)$$

Sean ahora $x\in H$ y $\lambda\in\mathbb{C}$ Entonces existe un $y\in Ker(A)^{\perp}$ tal que $B(x)=A(y)$

Luego $\lambda y\in Ker(A)^{\perp}$ y

$$B(\lambda x)=\lambda B(x)=\lambda A(y)=A(\lambda y)$$

Por lo tanto

$$D(\lambda x)=\lambda y=\lambda D(x)$$

De lo anterior se tiene que D es una función lineal

- Probemos que $D\in B(H)$ En efecto consideremos

$$Grf(D)=\{(x\ \ D(x))\ \ x\in H\}$$

el gráfico de D Sea $\{(x\ \ D(x\ ))\}_{\in N}$ una sucesión de elementos de $Grf(D)$ tal que $x\ \to x\ D(x\ )\to y$ Luego

$$D(x\ )\in Ker(A)^{\perp}\ \text{y}\ B(x\ )=A(D(x\ ))$$

Como $Ker(A)^{\perp}$ es cerrado se tiene que $y\in Ker(A)^{\perp}$ Además

$$B(x)=B(lim_{n\to\infty}x\ )=lim_{n\to\infty}B(x\ )=lim_{n\to\infty}A(D(x\ ))=A(lim_{n\to\infty}D(x\ ))=A(y)$$

De lo anterior se tiene que $D(x)=y$ Por consiguiente $(x\ \ y)\in Grf(D)$ y $Grf(D)$ es cerrado Así por el Teorema del Gráfico cerrado D es un operador lineal acotado y

$$B=AD$$

$a\Rightarrow c$) Supongamos que existe un $D\in B(H)$ tal que $AD=B$

Luego para todo $x\in H$

$$\langle BB^{*}(x)\ x\rangle = \langle B^{*}(x)\ B^{*}(x)\rangle$$

$$= \|B\ (x)\|^{2}$$

$$= \|(AD)\ (x)\|^{2}$$

$$= \|D\ (A\ (x))\|^{2}$$

$$\leq \|D\ \|^{2}\ \|A\ (x)\|^{2}$$

$$= \|D\ \|^{2}\ \langle A\ (x)\ A\ (x)\rangle$$

$$= \|D\ \|^{2}\ \langle AA\ (x)\ x\rangle$$

$$= \langle (\|D\ \|^{2}\ AA\ )(x)\ x\rangle$$

Por consiguiente

$$BB\ \leq \|D\ \|^{2}\ AA$$

$c \Rightarrow a$) Supongamos que existe un $\lambda > 0$ tal que $BB^{*} \leq \lambda AA$ Sea $x \in H$ entonces

$$\|B\ (x)\|^{2} = \langle B^{*}(x)\ B\ (x)\rangle$$

$$= \langle BB^{*}(x)\ x\rangle$$

$$\leq \langle \lambda AA\ (x)\ x\rangle$$

$$= \lambda \langle A\ (x)\ A\ (x)\rangle$$

$$= \lambda \|A\ (x)\|^{2}$$

Por lo tanto

$$\|B^*(x)\| \leq \sqrt{\lambda}\|A\ (x)\| \text{ para todo } x \in H$$

Definamos la relación

$$E\ \ Ran(A\ ) \to Ran(B\ )$$

$$E(z) = B\ (x) \text{ donde } A\ (x) = z$$

- Probemos que E es una función En efecto sean $z \in Ran(A\ )$ y supongamos que existen $x_1\ x_2 \in H$ tal que

$$z = A\ (x_1) = A\ (x_2)$$

Luego $A\ (x_1 - x_2) = 0$ Por lo tanto

$$\|B^*(x_1 - x_2)\| \leq \sqrt{\lambda}\|A\ (x_1 - x_2)\| = 0$$

de donde

$$B\ (x_1 - x_2) = 0 \text{ y } B^*(x_1) = B\ (x_2)$$

Así pues E es una función

- Probemos que E es lineal En efecto sean $z_1\ z_2 \in Ran(A\ )$ $x_1\ x_2 \in H$ tales que $A\ (x_1) = z_1$ y $A\ (x_2) = z_2$ Entonces

$$A\ (\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A\ (x_1) + \beta A\ (x_2) = \alpha z_1 + \beta z_2 \in Ran(A\ )$$

por lo tanto

$$E(\alpha z_1 + \beta z_2) = B\ (\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha B^*(x_1) + \beta B^*(x_2) = \alpha E(z_1) + \beta E(z_2)$$

Para todos escalares $\alpha\ \beta$ Así pues E es lineal

- Probemos que $E \in B(Ran(A\ )\ Ran(B\ ))$ En efecto sean $z \in Ran(A\ )$ $x \in H$ tales que $A\ (x) = z$ entonces

$$\|E(z)\| = \|B^*(x)\| \leq \sqrt{\lambda}\|A\ (x)\| = \sqrt{\lambda}\|z\|$$

Esto implica que E es un operador lineal acotado en $Ran(A)$

Extendiendo el operador E a $\overline{Ran(A)}$ por continuidad y definiendo

$$E(x)=0 \text{ para todo } x\in \overline{Ran(B^*)}^{\perp}=Ran(B^*)^{\perp}$$

se obtiene que $E\in B(H)$ y $EA=B^*$ o sea que $AE^*=B$ Por lo tanto

$$AD=B \text{ de donde } D=E^*$$

Probemos la segunda parte del teorema Primeramente probemos que $Ker(X)=Ker(B)$ En efecto como $AX=B$ se tiene que $Ker(X)\subset Ker(B)$ Por otro lado en la demostración de $(b\Rightarrow a)$ podemos observar que sí $x\in Ker(B)$ entonces el unico vector $y\in Ker(A)^{\perp}$ tal que $A(y)=B(x)=0$ es $y=0$ por lo tanto $D(x)=y=0$ y $x\in Ker(D)$ Así pues $Ker(B)\subset Ker(X)$ De todo lo anterior se tiene que

$$Ker(X)=Ker(B)$$

Probemos ahora la unicidad En efecto cuando probamos $(b\Rightarrow a)$ el operador D que construimos tiene su rango contenido en $Ker(A)^{\perp}$

Supongamos que existe otro operador $D\in B(H)$ tal que

$$B=AD \text{ y } Ran(D)\subset Ker(A)^{\perp}$$

Entonces

$$A(D-D)=AD-AD=B-B=0$$

de donde

$$Ran\left(D-D\right)\subset Ker(A)\cap Ker(A)^{\perp}=\{0\}$$

Esto implica que $D=D$

Finalmente sea $\lambda>0$ tal que $BB^{*}\leq\lambda AA$ entonces

$$\|D\ A\ (x)\|^{2}=\|(AD)\ (x)\|^{2}$$

$$=\|B\ (x)\|^{2}$$

$$=\langle B\ (x)\ B^{*}(x)\rangle$$

$$=\langle BB^{*}(x)\ x\rangle$$

$$\leq\langle\lambda AA\ (x)\ x\rangle$$

$$=\lambda\langle A\ (x)\ A\ (x)\rangle$$

$$=\lambda\|A\ (x)\|^{2}$$

Así por continuidad se tiene que

$$\|D\ (z)\|^{2}\leq\lambda\|z\|^{2}\ \text{ para todo }\ z\in\overline{Ran\left(A\ \right)}$$

Ahora bien como $Ran(D)\subset Ker(A)^{\perp}$ se tiene que

$$\left(Ker\left(D\ \right)\right)^{\perp}=Ran(D)\subset Ker(A)^{\perp}=\overline{Ran\left(A\ \right)}$$

de donde

$$Ran\left(A\ \right)^{\perp}=\overline{Ran\left(A\ \right)}^{\perp}\subset Ker\left(D\ \right)$$

Por consiguiente

$$\|D\ (x)\|^{2}\leq\lambda\|x\|^{2}\ \text{ para todo }\ x\in\overline{Ran\left(A\ \right)}\oplus Ran\left(A\ \right)^{\perp}=H$$

así

$$\|D\|^2 = \|D\|^2 \leq \lambda$$

Esto implica que $\|D\|^2$ es una cota inferior del conjunto

$$\left\{\lambda \in \mathbb{R} \quad BB^* \leq \lambda AA\right\}$$

Por otro lado cuando probamos $(a \Rightarrow c)$ obtuvimos que

$$BB^* \leq \|D\|^2 AA = \|D\|^2 AA$$

por consiguiente

$$\|D\|^2 = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R} \quad BB^* \leq \lambda AA\right\}$$

La afirmación queda probada tomando $X = D$

Corolario 3 1 1 Sean $A \in B(H)^+$ y $L \in B(H)$ L posee un A adjunto si y sólo si $Ran(L^* A) \subset Ran(A)$

Demostración

Por el Teorema 3 1 5 se tiene que

$Ran(L^* A) \subset Ran(A) \Leftrightarrow$ Existe un $W \in B(H)$ tal que

$$AW = L^* A$$

y por el Teorema 3 1 4 se tiene que

$$AW = L^{*}A \Leftrightarrow \text{W es un A adjunto de L}$$

Así pues

$$\text{L posee un A adjunto si y sólo si } Ran\left(L^{*}A\right) \subset Ran(A)$$

En el siguiente teorema presentamos una caracterización de los operadores idempotentes que poseen un A adjunto

Teorema 3 1 6 Sea $A \in B(H)$ y $Q \in B(H)$ tal que $Q^2 = Q$ (Q no es necesariamente auto-adjunto) Existe un $W \in B(H)$ tal que $Q^{*}A = AW$ (esto es Q tiene un A adjunto) si y solo sí

$$Ran(A) = \left[Ran(A) \cap Ker(Q^{*})\right] \oplus \left[Ran(A) \cap Ran(Q^{*})\right]$$

$$= \left[Ran(A) \cap \left(Ker(Q)\right)^{\perp}\right] \oplus \left[Ran(A) \cap \left(Ran(Q)\right)^{\perp}\right]$$

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que existe un $W \in B(H)$ tal que $Q^{*}A = AW$ Sea $\varepsilon \in Ran(A)$, luego existe un $\eta \in H$ tal que $A(\eta) = \varepsilon$ Como $\left(Q^{*}\right)^2 = Q^{*}$ $Ran\left(Q^{*}\right)$ es un subespacio cerrado de H y $Ran\left(Q^{*}\right) \cap Ker\left(Q^{*}\right) = \{0\}$

Además para todo $x \in H$ se tiene que

$$x = y + z \quad \text{con} \quad y = Q^{*}(x) \in Ran(Q^{*}) \quad z = x - Q\ (x) \in Ker(Q\ )$$

Por lo tanto

$$H = Ran(Q\ ) \oplus Ker(Q\ )$$

Luego

$$\varepsilon = A(\eta) = Q\ (\omega) + \beta \quad \text{con } \omega \in H \text{ y } \beta \in Ker(Q\ )$$

de donde

$$Q\ (\varepsilon) = Q\ (A(\eta)) = Q\ (Q\ (\omega) + \beta) = (Q\ )^{2}(\omega) = Q\ (\omega)$$

y

$$Q\ (\omega) = Q\ A(\eta) \in Ran(Q\ A)$$

Pero como $Q^{*}A = AW$ se tiene que

$$Q^{*}(\omega) \in Ran(Q\ A) = Ran(AW) \subseteq Ran(A)$$

Así pues

$$Q\ (\omega) \in Ran(A) \cap Ran(Q\ )$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} Q\ (\beta) &= Q\ (A(\eta) - Q\ (\omega)) \\ &= Q\ (A(\eta)) - Q\ (\omega) \\ &= Q\ (\omega) - Q\ (\omega) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y $\beta = A(\eta) - Q\ (\omega) \in Ran(A)$ Por lo tanto

$$\beta \in Ran(A) \cap Ker(Q\ )$$

Así pues

$$\varepsilon = Q\ (\omega) + \beta \ \text{ con } Q\ (\omega) \in Ran(A) \cap Ran(Q\ ) \text{ y } \beta \in Ran(A) \cap Ker(Q\ )$$

Luego como $Ran(Q^*) \cap Ker(Q^*) = \{0\}$ se tiene que

$$Ran(A) = [Ran(A) \cap Ker(Q\ )] \oplus [Ran(A) \cap Ran(Q\ )]$$

$\Leftarrow$) Supongamos que

$$Ran(A) = [Ran(A) \cap Ker(Q\ )] \oplus [Ran(A) \cap Ran(Q\ )]$$

entonces

$$Ran(Q\ A) = Q\ [Ran(A) \cap Ker(Q\ )] \oplus Q\ [Ran(A) \cap Ran(Q\ )]$$

$$= Q^*[Ran(A) \cap Ran(Q^*)]$$

$$= Ran(A) \cap Ran(Q\ )$$

de donde

$$Ran(Q^{*}A) \subseteq Ran(A)$$

Luego por el Teorema 3.1.5, existe una solución $W \in B(H)$ de la ecuación $AX = Q^{*}A$, esto es

$$AW = Q^{*}A$$

Corolario 3.1.2: Sean $A \in B(H)^{+}$ y $Q \in B(H)$ tal que $Q^{2} = Q$. Q posee un A-adjunto si y solo si

$$Ran(A) = [Ran(A) \cap Ker(Q^{*})] \oplus [Ran(A) \cap Ran(Q^{*})]$$

$$= \left[Ran(A) \cap (Ker(Q))^{\perp} \right] \oplus \left[Ran(A) \cap (Ran(Q))^{\perp} \right]$$

Demostración

Esto es consecuencia directa de los Teoremas 1.2.4 y 3.1.6

3.2 Proyecciones A-autoadjuntas y compatibilidad

Los operadores que son autoadjuntos respecto a un producto interno son conocidos como simetrizables. Aquí trabajaremos con operadores simetrizables o autoadjuntos respecto al producto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle_{A}$, con $A \in B(H)^{+}$. Tales operadores también se les denomina proyecciones autoadjuntas.

Definición 3 2 1 Sean $A\in B(H)^{+}$ y $T\in B(H)$ T es A-autoadjunto si

$$\langle T(x)\ y\rangle_A=\langle x\ \ T(y)\rangle_A \text{ para todo } x\ \ y\in H$$

es decir si

$$AT=T^{*}A$$

Observación Note que la existencia de un operador A adjunto no está garantizado En efecto $T\in B(H)$ admite un operador A adjunto si y solo si la ecuación $AX=T^{*}A$ tiene solución De esta manera T puede no tener un operador A adjunto tener solamente uno o bien tener infinitos operadores

A adjuntos

Por otro lado el hecho que un operador $T\in B(H)$ sea A autoadjunto no implica que sea autoadjunto esto es

$$\sim\left(AT=T^{*}A\Rightarrow T^{*}=T\right)$$

Notaciones

$\mathbf{Q}=Q(H)=\left\{\ Q\in B(H)\ \ Q^{2}=Q\right\}$

$\mathcal{P}=P(H)=\left\{\ P\in Q(H)\ \ P=P^{*}\right\}=\left\{P\in B(H)\ \ P\ es\ una\ proyeccion\right\}$

A los elementos de $\mathbf{Q}-\mathcal{P}$ se les llama proyecciones oblicuas

Si Z es un subespacio cerrado de H entonces

$$Q_Z = \{ Q \in Q(H) \quad Ran(Q) = Z \}$$

Definición 3 2 2 Sean $A \in B(H)$ y Z un subespacio cerrado de H denotemos

$$P_A(H) = \{ Q \in Q(H) \quad Q^* A = AQ \} = \{ Q \in Q(H) \ Q \, es \ A-autoadjunta \}$$

$$P(A \ Z) = \{ Q \in Q_Z \quad AQ = Q \ A \}$$

$$= Q_Z \cap P_A$$

$$= \{ Q \in Q_Z \quad Q \, es \ A-autoadjunta \}$$

Diremos que el par $(A \ Z)$ es compatible sí $P(A \ Z) \neq \varnothing$

El objetivo principal de este trabajo es estudiar el conjunto $P(A \ Z)$ y presentar condiciones para que $P(A,Z)$ sea no vacío o sea que podamos determinar operadores $Q \in Q_Z$ que sean A autoadjuntos

Veamos el siguiente resultado el cual es una versión particular del teorema de Douglas(Teorema 3 1 5)

Teorema 3 2 1 Sean $A \in B(H)$ y $Q \in Q(H)$ con $Ran(Q) = S$ y $Ker(Q) = Z$

Entonces

a) $Ran(QA) \subseteq Ran(A)$ si y solo sí $Ran(A) = [Ran(A) \cap S] \oplus [Ran(A) \cap Z]$

b) Si $D \in B(H)$ es la solución reducida de la ecuación $AX = QA$ entonces $D \in Q(H)$ Además se tiene que

$$Ran(D) = A^{-1}(S) \cap \left(A^{-1}(S) \cap Ker(A)\right)^{\perp} \text{ y } Ker(D) = A^{-1}(Z)$$

Demostración

a) Supongamos que $Ran(QA) \subseteq Ran(A)$ Sabemos que

$$Ran(QA) \subseteq Ran(Q) = S$$

luego

$$Ran(QA) \subseteq Ran(A) \cap S$$

Sea $\varepsilon \in Ran(A)$ entonces

$$\begin{aligned}\varepsilon - Q(\varepsilon) &= I(\varepsilon) - Q(\varepsilon) \\ &= (I - Q)(\varepsilon)\end{aligned}$$

de donde

$$\varepsilon - Q(\varepsilon) \in Ran(I - Q) = Ker(Q) = Z$$

Como $\varepsilon \in Ran(A)$ entonces $Q(\varepsilon) \in Ran(QA) \subseteq Ran(A)$ Por lo tanto

$$\varepsilon \in Ran(A) \text{ y } Q(\varepsilon) \in Ran(A)$$

de donde $\varepsilon - Q(\varepsilon) \in Ran(A)$ Luego

$$\varepsilon - Q(\varepsilon) \in Ran(A) \cap Z$$

Además

$$Q(\varepsilon) \in Ran(A) \cap Ran(Q) = Ran(A) \cap S$$

Por lo tanto

$$\varepsilon = Q(\varepsilon) + \varepsilon - Q(\varepsilon)$$

con

$$Q(\varepsilon) \in Ran(A) \cap S \quad \varepsilon - Q(\varepsilon) \in Ran(A) \cap Z$$

de donde

$$Ran(A) = [Ran(A) \cap S] + [Ran(A) \cap Z]$$

Por otro lado como $Ker(Q) \cap Ran(Q) = \{0\}$ se tiene que

$$[Ran(A) \cap S] \cap [Ran(A) \cap Z] = \{0\}$$

Por lo que

$$Ran(A) = [Ran(A) \cap S] \oplus [Ran(A) \cap Z]$$

Recíprocamente supongamos que

$$Ran(A)=[Ran(A)\cap S]\oplus[Ran(A)\cap Z]$$

Sea $\varepsilon\in Ran(QA)$ entonces existe un $x\in H$ tal que $\varepsilon=Q(A(x))$ Como $A(x)\in Ran(A)$ existen $z_1\in Ran(A)\cap S$ $z_2\in Ran(A)\cap Z$ tal que

$$A(x)=z_1+z_2$$

luego

$$\varepsilon=Q(A(x))=Q(z_1)+Q(z_2)=Q(z_1)$$

Como $z_1\in S=Ran(Q)$ existe un $t\in H$ tal que $Q(t)=z_1$ Por lo tanto

$$Q(z_1)=Q(Q(t))=Q(t)=z_1$$

Así pues

$$\varepsilon=Q(z_1)=z_1\in Ran(A)\cap S\subset Ran(A)$$

De lo anterior se tiene que

$$Ran(QA)\subset Ran(A)$$

b) Supongamos que D es la solución reducida de la ecuación $AX=QA$ entonces

$$AD=QA \quad y \quad Ran(D)\subset(Ker(A))^{\perp}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}AD^2&=A(DD)\\&=(AD)D\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
AD^2 &= (QA)D \\
&= Q(AD) \\
&= Q(QA) \\
&= (QQ)A \\
&= Q^2 A \\
&= QA
\end{aligned}
$$

Además sabemos que

$$Ran(D^2) \subseteq Ran(D) \subseteq (Ker(A))^{\perp}$$

Entonces D^2 también es una solución reducida de la ecuación $AX = QA$ Por la unicidad de esta solución (Teorema 3 1 5) tenemos que $D^2 = D$ Por lo tanto $D \in Q(H)$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
x \in Ker(D) &\Rightarrow D(x) = 0 \\
&\Rightarrow A(D(x)) = 0 \\
&\Rightarrow (QA)(x) = 0 \\
&\Rightarrow x \in Ker(QA)
\end{aligned}
$$

de donde

$$Ker(D) \subset Ker(QA) \qquad (1)$$

También

$$x \in Ker(QA) \Rightarrow (QA)(x) = 0$$

$$\Rightarrow A(D(x)) = 0$$

$$\Rightarrow D(x) \in Ker(A)$$

Pero

$$D(x) \in Ran(D) \subset (Ker(A))^{\perp}$$

luego

$$D(x) \in Ker(A) \cap (Ker(A))^{\perp} = \{0\}$$

es decir $D(x) = 0$ y $x \in Ker(D)$ Por lo tanto

$$Ker(QA) \subset Ker(D) \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que

$$Ker(D) = Ker(QA)$$

Probemos que

$$A(A^{-1}(S)) = Ran(A) \cap S$$

En efecto sabemos que

$$A\left(A^{-1}(S)\right) \subset Ran(A) \quad y \quad A\left(A^{-1}(S)\right) \subset S$$

por lo tanto

$$A\left(A^{-1}(S)\right) \subset Ran(A) \cap S \qquad (3)$$

Por otro lado

$$y \in Ran(A) \cap S \Rightarrow y \in Ran(A) \wedge y \in S$$

$$\Rightarrow y = A(x) \in S \text{ para algun } x \in H$$

$$\Rightarrow y = A(x) \wedge x \in A^{-1}(S)$$

$$\Rightarrow y \in A\left(A^{-1}(S)\right)$$

de donde

$$Ran(A) \cap S \subset A\left(A^{-1}(S)\right) \qquad (4)$$

De (3) y (4) se obtiene que

$$A\left(A^{-1}(S)\right) = Ran(A) \cap S$$

Probemos que $Ker(D) = A^{-1}(Z)$ En efecto como $Ker(D) = Ker(QA)$ se tiene que

$$x \in Ker(D) \Leftrightarrow x \in Ker(QA)$$

$$x \in Ker(D) \Leftrightarrow Q(A(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow A(x) \in Z$$

$$\Leftrightarrow x \in A^{-1}(Z)$$

por consiguiente

$$Ker(D) = A^{-1}(Z)$$

Finalmente usando el hecho de que $A(A^{-1}(S)) = Ran(A) \cap S$ $Ran(QA) = Ran(AD) \subset Ran(A)$ y que $Ran(A) = [Ran(A) \cap S] \oplus [Ran(A) \cap Z]$ se prueba que

$$Ran(D) = A^{-1}(S) \cap [A^{-1}(S) \cap Ker(A)]^{\perp}$$

Teorema 3 2 2 Sean $A \in B(H)^{+}$ y $Q \in Q(H)$ Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

a) $Q \in P_A(H)$ o sea que Q es A autoadjunto

b) $Ker(Q) \subseteq (Ran(Q))^{\perp}$

c) $\langle Q(\varepsilon)\ Q(\varepsilon) \rangle_A \leq \langle \varepsilon\ \varepsilon \rangle_A$ para todo $\varepsilon \in H$ En este caso se dice que Q es una A contracción

Demostración

Denotemos $S = Ran(Q)$ Luego por el Teorema 3 1 2

$$\left(Ran(Q)\right)^{\perp} = S^{\perp} = A^{-1}\left(S^{\perp}\right) = \left(A(S)\right)^{\perp}$$

$a \Rightarrow b)$ Supongamos que $Q \in P_A(H)$ entonces $Q^{*}A = AQ$ Luego para todo $\varepsilon\ \eta \in H$ se tiene que

$$\langle A(\eta)\ Q(\varepsilon)\rangle = \langle Q\ (A(\eta))\ \varepsilon\rangle$$

$$= \langle Q\ A(\eta)\ \varepsilon\rangle$$

$$= \langle AQ(\eta)\ \varepsilon\rangle$$

$$= \langle Q(\eta)\ A(\varepsilon)\rangle$$

Sea $\varepsilon \in Ker(Q)$ entonces $Q(\varepsilon) = 0$ Luego para cada $\eta \in H$ se tiene que

$$\langle \varepsilon\ Q(\eta)\rangle_A = \langle A(\varepsilon)\ Q(\eta)\rangle = \overline{\langle Q(\eta)\ A(\varepsilon)\rangle} = \overline{\langle A(\eta)\ Q(\varepsilon)\rangle} = 0$$

Por lo tanto $\varepsilon \in \left(Ran(Q)\right)^{\perp_A}$ y

$$Ker(Q) \subset \left(Ran(Q)\right)^{\perp}$$

$b \Rightarrow c)$ Supongamos ahora que

$$Ker(Q) \subseteq \left(Ran(Q)\right)^{\perp} = (S)^{\perp} = A^{-1}\left(S^{\perp}\right) = A(S)^{\perp}$$

Sea $\varepsilon \in H$ entonces

$$\varepsilon = Q(\varepsilon) + \left(\varepsilon - Q(\varepsilon)\right)$$

Note que

$$\eta = Q(\varepsilon) \in S \text{ y } \beta = \varepsilon - Q(\varepsilon) \in Ker(Q) \subset S^{\perp} = A^{-1}(S^{\perp})$$

Luego

$$\varepsilon = \eta + \beta \text{ con } \eta \in S \quad \beta \in A^{-1}(S^{\perp})$$

y

$$\langle \beta \;\; A(\eta) \rangle = \langle A(\beta) \;\; \eta \rangle = 0$$

Además

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon \;\; \varepsilon \rangle_A &= \langle A(\varepsilon) \;\; \varepsilon \rangle = \langle A(\eta + \beta) \;\; \eta + \beta \rangle \\
&= \langle A(\eta) + A(\beta) \;\; \eta + \beta \rangle \\
&= \langle A(\eta) \;\; \eta \rangle + \langle A(\eta) \;\; \beta \rangle + \langle A(\beta) \;\; \eta \rangle + \langle A(\beta) \;\; \beta \rangle \\
&= \langle A(\eta) \;\; \eta \rangle + \langle A(\beta) \;\; \beta \rangle \\
&\geq \langle A(\eta) \;\; \eta \rangle
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\langle A(\eta) \;\; \eta \rangle &= \langle A(Q(\varepsilon)) \;\; Q(\varepsilon) \rangle \\
&= \langle Q \;\; (A(Q(\varepsilon))) \;\; \varepsilon \rangle
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon \;\; \varepsilon \rangle_A = \langle A(\varepsilon) \;\; \varepsilon \rangle \geq \langle A(\eta) \;\; \eta \rangle \\
= \langle Q \;\; (A(Q(\varepsilon))) \;\; \varepsilon \rangle
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\langle Q(\varepsilon)\ Q(\varepsilon)\rangle_A = \langle A(Q(\varepsilon))\ Q(\varepsilon)\rangle = \langle Q\ (A(Q(\varepsilon)))\ \varepsilon\rangle$$

Por lo tanto

$$\langle \varepsilon\ \varepsilon\rangle_A \geq \langle Q(\varepsilon)\ Q(\varepsilon)\rangle_A$$

$c \Rightarrow a)$ Supongamos ahora que $\langle Q(\varepsilon)\ Q(\varepsilon)\rangle_A \leq \langle \varepsilon\ \varepsilon\rangle_A$ para todo $\varepsilon \in H$

Entonces

$$\langle A(Q(\varepsilon))\ Q(\varepsilon)\rangle \leq \langle A(\varepsilon)\ \varepsilon\rangle$$

y

$$\langle Q\ (A(Q(\varepsilon)))\ \varepsilon\rangle \leq \langle A(\varepsilon)\ \varepsilon\rangle \quad \text{para todo } \varepsilon \in H$$

Por consiguiente $Q\ AQ \leq A$ De donde

$$\left(Q\ A^{\frac{1}{2}}\right)\left(Q\ A^{\frac{1}{2}}\right) = Q\ A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}Q = Q\ AQ \leq A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$

Entonces por la parte (b) del Teorema 3 1 5 la ecuación $A^{\frac{1}{2}}X = Q\ A^{\frac{1}{2}}$ tiene una solución D con $\|D\| \leq 1$ Luego por el Teorema 3 2 1 $D^2 = D$

Probemos que $D \in P_A(H)$ Para esto probaremos que $Ran(D) = Ker(D)^{\perp}$ En efecto sea $x \in Ker(D)^{\perp}$ Como $D^2 = D$ se tiene que

$$D(x - D(x)) = D(x) - D^2(x) = D(x) - D(x) = 0$$

de donde $x - D(x) \in Ker(D)$ Por lo tanto

$$0 = \langle x - D(x) \;\; x \rangle = \|x\|^2 - \langle D(x) \;\; x \rangle$$

y

$$\langle D(x) \;\; x \rangle = \|x\|^2$$

Luego por la desigualdad de Schwarz

$$\|x\|^2 = \langle D(x) \; x \rangle$$

$$= |\langle D(x) \; x \rangle|$$

$$\leq \|D(x)\| \|x\|$$

$$\leq \|D\| \|x\|^2$$

$$\leq \|x\|^2$$

Por lo tanto

$$\|D(x)\| \|x\| = \|x\|^2$$

y

$$\|D(x)\| = \|x\| = \sqrt{\langle D(x) \; x \rangle}$$

Por otro lado

$$\|x-D(x)\|^2=\langle x-D(x)\ x-D(x)\rangle$$

$$=\|x\|^2-2\operatorname{Re}(\langle D(x)\ x\rangle)+\|D(x)\|^2$$

$$=\|x\|^2-2\langle D(x)\ x\rangle+\|D(x)\|^2$$

$$=2\langle D(x)\ x\rangle-2\langle D(x)\ x\rangle$$

$$=0$$

o sea que $D(x)=x$ Así

$$Ker(D)^{\perp}\subseteq Ran(D) \qquad (1)$$

Por otro lado sabemos que

$$H=Ker(D)\oplus Ker(D)^{\perp}$$

Sea $y\in Ran(D)$ entonces

$$y=z+w \text{ con } z\in Ker(D)\ \ w\in Ker(D)^{\perp}$$

Como $w\in(Ker(D))^{\perp}\subseteq Ran(D)$ existe un $\varepsilon\in H$ tal que

$D(\varepsilon)=w$ Luego

$$D(w)=D^2(\varepsilon)=D(\varepsilon)=w$$

De igual manera como $y \in Ran(D)$ existe un $\eta \in H$ tal que $y = D(\eta)$ Por consiguiente

$$D(y) = D^2(\eta) = D(\eta) = y$$

Ahora bien como $z = y - w$ se tiene que

$$D(z) = D(y) - D(w) = y - w = z$$

Pero como $z \in Ker(D)$

$$0 = D(z) = z$$

Así pues

$$y = z + w = w \in Ker(D)^{\perp}$$

y

$$Ran(D) \subseteq Ker(D)^{\perp} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que

$$Ran(D) = Ker(D)^{\perp}$$

y por lo tanto

$$H = Ker(D) \oplus Ran(D)$$

Así pues por el Teorema 2 3 1 $D \in P_A(H)$

Ahora note que

$$Q\,A=\left(Q\,A^{\frac{1}{2}}\right)A^{\frac{1}{2}}=\left(A^{\frac{1}{2}}D\right)A^{\frac{1}{2}}$$

Además

$$\left(A^{\frac{1}{2}}D\right)=\left(Q\,A^{\frac{1}{2}}\right)$$

de donde

$$D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)=\left(A^{\frac{1}{2}}\right)Q$$

y

$$DA^{\frac{1}{2}}=A^{\frac{1}{2}}Q$$

Por lo tanto

$$Q\,A=\left(A^{\frac{1}{2}}D\right)A^{\frac{1}{2}}=A^{\frac{1}{2}}\left(DA^{\frac{1}{2}}\right)=A^{\frac{1}{2}}\left(A^{\frac{1}{2}}Q\right)=AQ$$

Esto implica que $Q\in P_A(H)$

3 3 Caracterizaciones de la compatibilidad

Finalizamos este trabajo presentando algunas caracterizaciones de la compatibilidad en términos del operador $A \in B(H)^{+}$ Para esto es necesario representar los operadores en forma matricial En efecto sea S un subespacio cerrado de H Luego

$$H = S \oplus S^{\perp}$$

Denotemos por $P = P_S$ la proyección ortogonal sobre S

Para cada $T \in B(H)$ se tiene la identidad

$$T = PTP + PT(I-P) + (I-P)TP + (I-P)T(I-P)$$

Denotemos

$$t_{11} = PTP_{/S} \in B(S) \qquad t_{12} = PT(I-P)_{/S^{\perp}} \in B(S^{\perp}\ S)$$

$$t_{21} = (I-P)TP_{/S} \in B(S\ S^{\perp}) \qquad t_{22} = (I-P)T(I-P)_{/S^{\perp}} \in B(S^{\perp})$$

Sea

$$x = \varepsilon + \eta \in S \oplus S^{\perp} = H \quad \text{con } \varepsilon \in S \ \ \eta \in S^{\perp}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} = t_{11}(\varepsilon) + t_{12}(\eta) + t_{21}(\varepsilon) + t_{22}(\eta)$$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} = t_{11}(\varepsilon+\eta)+t_{12}(\varepsilon+\eta)+t_{21}(\varepsilon+\eta)+t_{22}(\varepsilon+\eta)$$

$$= T(x)$$

Así que podemos hacer la siguiente identificación

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

Ahora bien si $A \in B(H)$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

y $a \in B(S)$ $c \in B(S^{\perp})^{+}$

Observe que bajo esta convención se tiene que

$$P = P_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Más aun si $Q \in Q_S$ y

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P = QP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

de donde $a = 1 \quad y \quad c = 0$ Por otro lado

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = Q = PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde $d = 0$ y b puede ser cualquier operador

Asi pues si $Q \in Q_S$ entonces

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ para algun } y \in B(S^{\perp}\ S)$$

Teorema 3 3 1 Sean $A \in B(H)^{+}$ y S un subespacio cerrado de H Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Entonces $Ran(b\ ) \subset Ran\left(c^{\frac{1}{2}}\right) \quad y \quad Ran(b) \subset Ran\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$

Demostración

Como $a \in B(S)$ por el Teorema 2 1 1 f $a + I_S$ es invertible Denotemos esta inversa por $(a + I\ )^{-1} \in B(S)^{+}$ Note que

$$0 \leq \begin{pmatrix} I_S & 0 \\ -b \ (a+I_S)^{-1} & I_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+I_S & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_S & -(a+I_S)^{-1} b \\ 0 & I_S \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_S & 0 \\ -b \ (a+I_S)^{-1} & I_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+I_S & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_S & -(a+I_S)^{-1} b \\ 0 & I_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+I_S & 0 \\ 0 & c-b \ (a+I_S)^{-1} b \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$c-b \ (a+I_S)^{-1} b \geq 0$$

y

$$b \ (a+I_S)^{-1} b \leq c$$

de donde

$$b \ (a+I_S)^{-\frac{1}{2}} (a+I_S)^{\ \frac{1}{2}} b \leq c^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$$

$$b \ (a+I_S)^{\ \frac{1}{2}} \left[b \ (a+I_S)^{-\frac{1}{2}} \right] \leq c^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$$

Por el Teorema 3 1 5 se tiene que

$$Ran(b \ ) = Ran\left(b \ (a+I_S)^{-\frac{1}{2}} \right) \subseteq Ran\left(c^{\frac{1}{2}} \right)$$

De igual manera como $c \in B(S^{\perp})$ por el Teorema 2 1 1 f $c+I_S$ es invertible y $(c+I_S)^{-1} \in B(S^{\perp})$ Note que

$$0 \leq \begin{pmatrix} I_S & -b(c+I_S)^{-1} \\ 0 & I_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c+I_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_S & 0 \\ -(c+I_S)b & I_S \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-b(c+I_S{}^{\perp})^{-1}b & 0 \\ 0 & c+I_S \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$a-b(c+I_{S^\perp})^{-1}b \geq 0$$

$$b(c+I_S)^{-1}b \leq a$$

de donde

$$b(c+I_{S^\perp})^{-\frac{1}{2}}(c+I_S)^{-\frac{1}{2}}b \leq a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$$

$$b(c+I_{S^\perp})^{-\frac{1}{2}}\left[b(c+I_S)^{-\frac{1}{2}}\right] \leq a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$$

Por el Teorema 3 1 5 se tiene que

$$Ran(b) = Ran\left(b(c+I_S)^{-\frac{1}{2}}\right) \subseteq Ran(a)^{\frac{1}{2}}$$

Teorema 3 3 2 Sean $A \in B(H)^{+}$ y S un subespacio cerrado de H Las siguientes condiciones son equivalentes

a) El par$(A\ S)$ es compatible

b) $S+S^{\perp A}=H$

c) Existe un subespacio cerrado $W\subseteq S^{\perp A}$ tal que $S\oplus W=H$

Demostración

$a\Rightarrow b)$ Supongamos que el par$(A\ S)$ es compatible esto es $P(A\ S)\neq\varnothing$ Por lo cual existe un $Q\in P(A\ S)$ Entonces por el Teorema 3 2 2 se tiene que

$$Ker(Q)\subseteq Ran(Q)^{\perp A}=S^{\perp A}$$

Además como $Q^2=Q$ y $Ran(Q)=S$ se tiene que

$$H=Ran(Q)+Ker(Q)$$

$$=S+Ker(Q)$$

$$\subseteq S+S^{\perp A}$$

Es claro que $S+S^{\perp A}\subseteq H$ Luego $H=S+S^{\perp A}$

$b\Rightarrow c)$ Supongamos ahora que $H=S+S^{\perp A}$ Consideremos los siguientes subespacios

$$N=S\cap S^{\perp A} \text{ y } W=S^{\perp A}\cap N^{\perp}$$

Note que

$$S\cap W=S\cap(\ S^{\perp A}\cap N^{\perp}\ )$$

$$S \cap W = \left(S \cap S^{\perp A}\right) \cap N^{\perp}$$

$$= N \cap N^{\perp}$$

$$= \{0\}$$

Además como por hipótesis $H = S + S^{\perp A}$ entonces $S \oplus W \subseteq H$ Sea $\varepsilon \in H$ entonces

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \text{ con } \varepsilon_1 \in S \text{ y } \varepsilon_2 \in S^{\perp A}$$

Dado que N es un subespacio cerrado de H entonces

$$H = N \oplus N^{\perp}$$

Luego

$$\varepsilon_2 = \mu + \eta \quad \text{con } \mu \in N \quad \eta \in N^{\perp}$$

de donde

$$\varepsilon_2 - \mu = \eta \in N^{\perp}$$

Como $\varepsilon_2 \in S^{\perp A}$ y $\mu \in N = S \cap S^{\perp A} \subseteq S^{\perp}$ se tiene que

$$\varepsilon_2 - \mu = \eta \in S^{\perp A}$$

de donde

$$\varepsilon_2 - \mu = \eta \in N^{\perp} \cap S^{\perp A} = W$$

Por lo que

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + (\mu + \eta)$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 + \mu) + \eta$$

donde $\varepsilon_1 + \mu \in S$ y $\eta \in W$ Por lo tanto $\varepsilon \in S \oplus W$ y

$$H \subseteq S \oplus W$$

De todo lo anterior se tiene que $H = S \oplus W$ con W un subespacio cerrado de H

$c \Rightarrow a)$ Supongamos que existe un subespacio cerrado $W \subseteq S^{\perp}$ tal que $S \oplus W = H$ Consideremos $Q \in Q_S$ la proyección (no necesariamente ortogonal) con $Ran(Q) = S$ y $Ker(Q) = W$ Luego para todo ε $\eta \in H$ se tiene

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \text{ y } \eta = \eta_1 + \eta_2$$

donde ε_1 $\eta_1 \in S$ y ε_2 $\eta_2 \in W$ Por consiguiente

$$\langle Q(\varepsilon)\ \eta \rangle_A = \langle Q(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\ \eta_1 + \eta_2 \rangle_A$$

$$= \langle \varepsilon_1\ \ \eta_1 + \eta_2 \rangle_A$$

$$= \langle \varepsilon_1\ \ \eta_1 \rangle_A + \langle \varepsilon_1\ \ \eta_2 \rangle_A$$

$$= \langle \varepsilon_1\ \ \eta_1 \rangle_A$$

y

$$\langle \varepsilon \;\; Q(\eta)\rangle_A = \langle \varepsilon_1+\varepsilon_2 \;\; Q(\eta_1+\eta_2)\rangle_A$$

$$= \langle \varepsilon_1+\varepsilon_2 \;\; \eta_1\rangle_A$$

$$= \langle \varepsilon_1 \;\; \eta_1\rangle_A + \langle \varepsilon_2 \;\; \eta_1\rangle_A$$

$$= \langle \varepsilon_1 \;\; \eta_1\rangle_A$$

De donde

$$\langle Q(\varepsilon) \;\; \eta \rangle_A = \langle \varepsilon \;\; Q(\eta)\rangle_A \text{ para todo } \varepsilon \;\; \eta \in H$$

Por consiguiente $AQ = Q^{*}A$ y $Q \in P(A\ S)$ Así pues el par $(A\ S)$ es compatible

Teorema 3 3 3 Sean $A \in B(H)^{+}$ S un subespacio cerrado de H y $P = P_S$ la proyección ortogonal sobre S Las siguientes condiciones son equivalentes

a) El par $(A\ S)$ es compatible

b) $Ran(PA) = Ran(PAP)$

c) La ecuación $(PAP)X = PA(I-P)$ admite una solución

Demostración

$b \Leftrightarrow c)$ Es una consecuencia inmediata del Teorema 3 1 5 y del hecho que

$$Ran(PAP) = Ran(PA) = Ran(PAP) + Ran(PA(I-P)) \supseteq Ran(PA(I-P))$$

$c \Leftrightarrow a)$ Denotemos

$$a = PAP_{/S} \in B(S)^{+} \quad y \quad b = PA(I-P)_{/S^{\perp}} \in B(S^{\perp}\ S)$$

Luego

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Sean $y \in B(S^{\perp}\ S)$ y

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $Ran(Q) = S$ y $Q^2 = Q$ Por lo tanto $Q \in Q_S$ Por otro lado como $a \in B(S)^{+}$ se tiene que

$$AQ = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ay \\ b & b\ y \end{pmatrix}$$

$$Q\ A = (AQ) \ = \begin{pmatrix} a & b \\ y\ a & y\ b \end{pmatrix}$$

Así

$$AQ = Q\ A \Leftrightarrow \begin{cases} ay = b \\ y\ a = b \\ b\ y = y\ b \end{cases} \Leftrightarrow ay = b$$

ya que si $ay = b$ entonces $y\ b = y\ ay = (y\ a)y = b\ y$

Por consiguiente

$$Q \in P(A\ S) \Leftrightarrow \text{ la ecuación } ax = b \text{ tiene solución}$$

$$\Leftrightarrow \text{ la ecuación } (PAP)X = PA(I-P) \text{ tiene solución}$$

En tal caso todo $Q \in P(A\ S)$ tiene la forma

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $ay = b$

De los dos ultimos teoremas podemos deducir el siguiente corolario

Corolario 3 3 1 Sean $A \in B(H)^{+}$ S un subespacio cerrado de H y $P = P_S$ la proyección ortogonal sobre S Los siguientes enunciados son equivalentes

a) El par $(A\ S)$ es compatible

b) $S + S^{\perp A} = H$

c) Existe un subespacio cerrado $W \subseteq S^{\perp A}$ tal que $S \oplus W = H$

d) $Ran(PA) = Ran(PAP)$

e) La ecuación $(PAP)X = PA(I-P)$ admite una solución

Corolario 3 3 2 Sean $A \in B(H)$ S un subespacio cerrado de H y $P = P_S$ la proyección ortogonal sobre S Si $Ran(PAP)$ es cerrado entonces el par $(A\ S)$ es compatible

Demostración

Consideremos la representación matricial

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

donde

$$a = PAP_{/S} \in B(S) \quad y \quad b = PA(I-P)_{/S} \in B(S^{\perp}\ S)$$

Entonces por el Teorema 3 3 1 $Ran(b) \subset Ran\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$ Pero como $Ran(a)$ es cerrado por el Teorema 2 2 3 $Ran\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = Ran(a)$ Luego $Ran(b) \subset Ran(a)$ Por consiguiente por el Teorema 3 1 5 la ecuación $ax = b$ tiene solución Finalmente por el Teorema 3 3 3 el par $(A\ S)$ es compatible

Corolario 3 3 3 Sean $A \in B(H)$ S un subespacio cerrado de H y $P = P_S$ la proyección ortogonal sobre S

i) Si $dim(H) < \infty$ entonces el par $(A\ S)$ es compatible

ii) Si $dim(S) < \infty$ entonces el par $(A\ S)$ es compatible

iii) Si A es invertible entonces el par $(A\ S)$ es compatible

Demostración

Este corolario es consecuencia directa del Corolario 3 3 2

Teorema 3 3 4 Sean $A \in B(H)^{+}$ y S un subespacio cerrado de H Si el par (A, S) es compatible entonces $S + Ker(A)$ es un subespacio cerrado de H

Demostración

Supongamos que el par $(A\ S)$ es compatible Sea $Q \in P(A\ S)$ y $E = I - Q$ Verifiquemos que E es una proyección A autoadjunta con nucleo S y que

$$Ker(A) \subseteq Ker(E\ A) = Ker(AE)$$

En efecto como $AQ = Q\ A$ se tiene que

$$\langle E\ (A(\varepsilon))\ \eta \rangle = \langle (I - Q)\ (A(\varepsilon))\ \eta \rangle$$

$$= \langle A(\varepsilon)\ (I - Q)(\eta) \rangle$$

$$= \langle A(\varepsilon)\ I(\eta) - Q(\eta) \rangle$$

$$= \langle A(\varepsilon)\ I(\eta) \rangle - \langle A(\varepsilon)\ Q(\eta) \rangle$$

$$\left\langle E\ (A(\varepsilon))\ \eta \right\rangle = \langle A(\varepsilon)\ I(\eta) \rangle - \langle Q\ (A(\varepsilon))\ \eta \rangle$$

$$= \langle A(\varepsilon)\ \eta \rangle - \langle A(Q(\varepsilon))\ \eta \rangle$$

$$= \langle A(I-Q)(\varepsilon)\ \eta \rangle$$

$$= \left\langle A(E(\varepsilon))\ \eta \right\rangle$$

para todo $\varepsilon\ \eta \in H$ Por lo tanto $E\ A = AE$ y E es A autoadjunto

Probemos ahora que E tiene nucleo S Sea $\varepsilon \in Ker(E)$ entonces

$$0 = E(\varepsilon) = (I-Q)(\varepsilon)$$

$$0 = I(\varepsilon) - Q(\varepsilon)$$

$$0 = \varepsilon - Q(\varepsilon)$$

de donde $\varepsilon = Q(\varepsilon)$ Por lo tanto $\varepsilon \in Ran(Q) = S$ lo que implica que

$$Ker(E) \subseteq Ran(Q) = S$$

Sea $\eta \in Ran(Q) = S$ entonces existe un $\varepsilon \in H$ tal que $Q(\varepsilon) = \eta$ Luego

$$E(\eta) = (I-Q)(\eta)$$

$$= (I-Q)(Q(\varepsilon))$$

$$= I(Q(\varepsilon)) - Q(Q(\varepsilon))$$

$$E(\eta) = Q(\varepsilon) - Q^2(\varepsilon)$$

$$= 0$$

De donde $\eta \in Ker(E)$ por lo tanto

$$Ran(Q) = S \subseteq Ker(E)$$

De todo lo anterior se tiene que $S = Ker(E)$

Probemos ahora que

$$Ker(A) \subseteq Ker(E\ A) = Ker(AE)$$

En efecto sea $\varepsilon \in Ker(A)$ entonces $A(\varepsilon) = 0$ Además

$$(E^{*}A)(\varepsilon) = E^{*}(A(\varepsilon))$$

$$= E\ (0) = 0$$

Luego $\varepsilon \in Ker(E\ A) = Ker(AE)$ Por lo tanto

$$Ker(A) \subseteq Ker(E\ A) = Ker(AE)$$

Así pues

$$S + Ker(A) = Ker(E) + Ker(A) \subseteq Ker(AE)$$

Por otro lado sea $\varepsilon \in H$ tal que $A(E(\varepsilon)) = 0$ entonces

$$E(\varepsilon) \in Ker(A) \cap Ran(E)$$

Luego

$$\varepsilon = Q(\varepsilon) + E(\varepsilon) \in S + [\ Ker(A) \cap Ran(E)\ ]$$

de donde

$$\{\varepsilon \in H \quad E(\varepsilon) \in Ker(A)\} \subseteq S + [\ Ker(A) \cap Ran(E)\ ]$$

Sea ahora

$$\varepsilon = \eta + \mu \in S + [\ Ker(A) \cap Ran(E)\ ]$$

con $\eta \in S$ y $\mu \in Ker(A) \cap Ran(E)$ Entonces

$$A(E(\varepsilon)) = A(E(\eta)) + A(E(\mu))$$

$$= A(0) + A(\mu)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

De donde $E(\varepsilon) \in Ker(A)$ Por lo tanto

$$S + [\ Ker(A) \cap Ran(E)\ ] \subseteq \{\varepsilon \in H \quad E(\varepsilon) \in Ker(A)\}$$

Así pues

$$S + [\ Ker(A) \cap Ran(E)\ ] = \{\varepsilon \in H \quad E(\varepsilon) \in Ker(A)\}$$

Esto es

$$Ker(AE) = S + [\ Ker(A) \cap Ran(E)\ ]$$

Así se tiene que

$$Ker(AE) \subseteq S + Ker(A) \quad \text{y} \quad S + Ker(A) \subseteq Ker(AE)$$

Por consiguiente

$$Ker(AE) = S + Ker(A)$$

De donde $S + Ker(A)$ es cerrado

Observación Sean $A \in B(H)^{+}$ un operador con rango cerrado S un subespacio cerrado de H y $P = P_S$ la proyección ortogonal sobre S Entonces

$$\overline{Ran(PAP)} = S \cap (S \cap Ker(A))^{\perp}$$

y $Ran(PAP)$ es cerrado si y solo sí el subespacio $Ker(A) + S$ es cerrado

Además los siguientes enunciados son resultados generales en la teoría de los espacios de Hilbert

- La suma de dos subespacios cerrados es cerrado si y sólo si la suma de sus complementos ortogonales es cerrado
- Si M y N son subespacios cerrados de H entonces

$$M \oplus N = H \Leftrightarrow M^{\perp} + N^{\perp} = H$$

- Si $T \in B(H)$ entonces $Ran(T)$ es cerrado si y solo si $Ran(T^{*})$ es cerrado (Ver [23])

En base a esta observación y los resultados probados anteriormente podemos establecer los siguientes criterios de compatibilidad para operadores con rango cerrado

Corolario 3 3 4 Sean $A \in B(H)^{+}$ un operador con rango cerrado S un subespacio cerrado de H y $P = P_S$ la proyección ortogonal sobre S Los siguientes enunciados son equivalentes

a) El par (A S) es compatible

b) $Ran(PAP)$ es cerrado

c) $S + Ker(A)$ es cerrado

d) $Ran(PA)$ es cerrado

e) $S^{\perp} + Ran(A)$ es cerrado

f) $Ran(AP) = A(S)$ es cerrado

Demostración

Por la observación anterior se tiene que (b) y (c) son equivalentes (b)$\Rightarrow$(a) fue probado en el Corolario 3 3 2

(a)$\Rightarrow$(c) fue probado en el Teorema 3 3 4

(d)$\Leftrightarrow$(e) es una consecuencia directa de la identidad

$$Ran(A)+S^{\perp}=P^{-1}\left(P\left(Ran(A)\right)\right)=P^{-1}\left(Ran(PA)\right)$$

(c)$\Leftrightarrow$(e)

$S+Ker(A)$ es cerrado $\Leftrightarrow S^{\perp}+Ker(A)^{\perp}$ es cerrado

$\Leftrightarrow S^{\perp}+Ran(A)$ es cerrado

ya que $Ran(A)$ es cerrado

(d)$\Leftrightarrow$(f)

$Ran(PA)$ es cerrado $\Leftrightarrow Ran\left((PA)\ \right)$ es cerrado

$\Leftrightarrow Ran\left(A\ P\ \right)$ es cerrado

$\Leftrightarrow Ran(AP)$ es cerrado

Así pues

$$b\Leftrightarrow c\quad b\Rightarrow a\Rightarrow c\quad d\Leftrightarrow e\Leftrightarrow c$$

de donde

$$a\Leftrightarrow b\Leftrightarrow c\Leftrightarrow d\Leftrightarrow e\Leftrightarrow f$$

Corolario 3 3 5 Sean $A \in B(H)^{+}$ un operador con rango cerrado S un subespacio cerrado de H y $P = P_S$ la proyección ortogonal sobre S Los siguientes enunciados son equivalentes

a) El par (A S) es compatible

b) Para todo $B \in B(H)$ con $Ran(B) = Ran(A)$ el par (B S) es compatible

c) El par $\left(P_{Ran(A)}\ S\right)$ es compatible donde $P_{Ran(A)}$ es la proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado $Ran(A)$

Demostración

Si $Ran(B) = Ran(A)$ entonces

$$Ker(B) = Ker(A) = Ker\left(P_{Ran(A)}\right)$$

Luego por el Corolario 3 3 4 los tres enunciados son equivalentes

Corolario 3 3 6 Sean $A \in B(H)$ un operador inyectivo S un subespacio cerrado de H Los siguientes enunciados son equivalentes

a) El par (A S) es compatible

b) $S \oplus S^{\perp A} = H$

c) $S^{\perp} \oplus \overline{A(S)}$ es cerrado

Demostración

Como A es un operador inyectivo se tiene que

$$S \cap S^{\perp_A} = \{0\}$$

Luego por el Teorema 3 3 2 se deduce que (a)$\Leftrightarrow$(b) Probemos ahora que (b)$\Leftrightarrow$(c) En efecto sea $W = \overline{A(S)}$ Como A es un operador inyectivo se tiene que

$$\overline{S^{\perp} + W} = \left(S \cap A(S)^{\perp}\right)^{\perp} = \left(S \cap S^{\perp_A}\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$$

Por lo tanto

$$S^{\perp} \oplus \overline{A(S)} \text{ es cerrado } \Leftrightarrow S^{\perp} \oplus \overline{A(S)} = \overline{S^{\perp} + W}$$

$$\Leftrightarrow S^{\perp} \oplus \overline{A(S)} = H$$

$$\Leftrightarrow S \oplus A(S)^{\perp} = H$$

A continuación presentamos una caracterización de los elementos de $P(A\ S)$ por medio de sus nucleos

Teorema 3 3 5 Sean $S\ T$ subespacios cerrados de H tales que $S + T = H$ Sea $W \subseteq T$ un subespacio cerrado tal que $S \oplus W = H$ entonces $W = T \cap M$ para algun subespacio cerrado $M \subseteq H$ que satisface $M \oplus (S \cap T) = H$ Recíprocamente si M es un subespacio cerrado de H tal que $M \oplus (S \cap T) = H$ entonces $S \oplus (T \cap M) = H$

Demostración

$\Rightarrow)$ Supongamos que W es un subespacio cerrado contenido en T tal que $S \oplus W = H$ Entonces

$$(S \cap T) \cap W = (S \cap W) \cap T = \{0\} \cap T = \{0\}$$

Por otro lado sabemos que

$$(S \cap T) + W \subseteq T$$

Ahora sea $\varepsilon \in T$ entonces

$$\varepsilon = \eta + \mu \text{ con } \eta \in S \text{ y } \mu \in W$$

Por lo tanto

$$\eta = \varepsilon - \mu \in S \cap T$$

Luego

$$\varepsilon \in (S \cap T) + W$$

De donde $T \subseteq (S \cap T) \oplus W$ Así pues

$$T = (S \cap T) \oplus W$$

Consideremos el subespacio $M = W \oplus T^{\perp}$ Entonces M es cerrado ya que W es un subespacio cerrado contenido en T Además se tiene que

$$M + (S \cap T) = (W + T^{\perp}) + (S \cap T)$$

$$= T^{\perp} + (W + (S \cap T))$$

$$= T^{\perp} + T$$

$$= H$$

Por consiguiente

$$M + (S \cap T) = H$$

Probemos ahora que $M \cap S \cap T = \{0\}$ En efecto supongamos que $\varepsilon \in M \cap S \cap T$ Como $\varepsilon \in M$ entonces

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_1 \in W \subseteq T \quad \varepsilon_2 \in T^{\perp}$$

Por lo tanto

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \in T \cap T^{\perp} = \{0\}$$

Por lo cual $\varepsilon = \varepsilon_1 \in W \cap S \cap T = \{0\}$ Así pues

$$M \oplus (S \cap T) = H$$

Probemos ahora que $W = T \cap M$ En efecto como $W \subseteq T$ y $M = W \oplus T^{\perp}$ se tiene que

$$W \subseteq T \cap M$$

Sea $\varepsilon \in T \cap M$ entonces

$$\varepsilon = \eta + \mu \text{ con } \eta \in W \quad \mu \in T^{\perp}$$

Luego

$$\varepsilon - \eta = \mu \in T \cap T^{\perp} = \{0\}$$

Por lo cual $\varepsilon = \eta \in W$ Así

$$T \cap M \subseteq W$$

Por consiguiente

$$W = T \cap M$$

Recíprocamente supongamos ahora que M es un subespacio cerrado de H tal que $M \oplus (S \cap T) = H$ Sabemos que $S + (T \cap M) \subseteq H$ Probemos que $H \subseteq S + (T \cap M)$ En efecto sea $\varepsilon \in H$ Luego

$$\varepsilon = \eta + \mu \text{ con } \eta \in S \quad \mu \in T$$

y

$$\mu = \delta + \beta \text{ con } \delta \in M \quad \beta \in S \cap T$$

Note que

$$\mu - \beta = \delta \in T \cap M$$

por lo cual

$$\varepsilon=(\eta+\beta)+\delta \quad \text{con } \eta+\beta\in S \quad y \quad \delta\in T\cap M$$

Luego

$$H\subseteq S+(T\cap M)$$

De donde $H=S+(T\cap M)$ Finalmente como $S\cap T\cap M=\{0\}$ se tiene que

$$H=S\oplus(T\cap M)$$

El teorema anterior nos permite presentar una descripción de los nucleos de los elementos del conjunto $P(A\ S)$ como lo veremos a continuación

Teorema 3 3 6 Sean $A\in B(H)^{+}$ y S un subespacio cerrado de H tal que el par $(A\ S)$ compatible Sea $Q\in Q_S$ Los siguientes enunciados son equivalentes

a) $Q\in P(A,S)$

b) $Ker(Q)=S^{\perp A}\cap M$ para algun complemento topológico M de $S\cap Ker(A)$

Demostración

$a\Rightarrow b)$ Supongamos que $Q\in P(A,S)$ Luego por el Teorema 3 2 2

$$Ker(Q)\subseteq S^{\perp A} \quad \text{y} \quad Ran(Q)\oplus Ker(Q)=H$$

Esto es $S \oplus Ker(Q) = H$ Además como $(A\ S)$ es compatible se tiene que

$$S + S^{\perp A} = H$$

Luego por el Teorema 3 3 5 existe un subespacio cerrado M de H tal que

$$Ker(Q) = S^{\perp A} \cap M \quad y \quad H = M \oplus (S \cap S^{\perp A}) = M \oplus Ker(A)$$

$b \Rightarrow a)$ Sea $Ker(Q) = S^{\perp A} \cap M$ Luego

$$Ker(Q) \subseteq S^{\perp A} = (Ran(Q))^{\perp A}$$

Luego por el Teorema 3 2 2 se tiene que $Q \in P_A(H)$ Pero como $Q \in Q_S$ se tiene que $Q \in P(A\ S)$

Finalizamos esta tesis con las siguientes conclusiones

Sean $A \in B(H)^+$ S un subespacio cerrado de H y $P = P_S$ la proyección ortogonal sobre S Consideremos la representación matricial

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

donde

$a = PAP_{/S} \in B(S)^+$ $b = PA(I-P)_{/S^\perp} \in B(S^\perp\ S)$ y $c = (I-P)A(I-P)_{/S^\perp} \in B(S^\perp)$

- En el Teorema 3 3 3 se probó que el par $(A\ S)$ es compatıble sı y solo sı la ecuacıón $ax=b$ admıte solucıón

- En el Corolarıo 3 1 2 se probó que sí $Q\in Q(H)$ entonces Q posee un A adjunto sı y solo sı

$$Ran(A)=\left[Ran(A)\cap(Ker(Q))^{\perp}\right]\oplus\left[Ran(A)\cap(Ran(Q))^{\perp}\right]$$

Supongamos que el par $(A\ S)$ es compatıble y sea $d\in B(S^{\perp}\ S)$ la solucıón reducıda de la ecuacıón $ax=b$ Definamos la proyeccıón oblıcua sobre S

$$P_{A\ S}:=\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Entonces se tıenen las sıguıentes propıedades

a) $P_{A,S}\in P(A\ S)$

b) $P(A\ S)$ tıene un unıco elemento (el cual es $P_{A\ S}$) sı y solo sı $S\oplus A^{-1}(S^{\perp})=H$

c) $A^{\ 1}(S^{\perp})\cap S=Ker(A)\cap S$

d) $P_{A\ S}$ tıene una norma mínıma en $P(A\ S)$ es decır

$$\|P_{A,S}\|=mın\{\|Q\|\ Q\in P(A\ S)\}$$

Sin embargo en general $P_{A\,S}$ no es el unico $Q \in P(A\ S)$ donde se alcanza el mínimo

Finalmente supongamos que $A = Q \in P(H)$ y que $T = Ran(A) = Ran(Q)$ Luego por el Corolario 3 3 4 el par $(A\ S) = (Q\ Ran(P))$ es compatible si y solo si $Ker(Q) + S = Ker(Q) + Ran(P)$ es cerrado

Denotemos

$$P_{Q\,P} := P_{Q,S}$$

donde $P_{Q,S}$ es la proyección definida anteriormente Los siguientes enunciados son equivalentes a la existencia de $P_{Q,P}$

1) $(Q\ S)$ es compatible

2) $(P\ T)$ es compatible

3) $Ker(Q) + Ran(P)$ es cerrado

4) $Ker(P) + Ran(Q)$ es cerrado

5) $Ran(PQ)$ es cerrado

6) $Ran(QP)$ es cerrado

7) $Ran(I - P + Q)$ es cerrado

8) $Ran(I - Q + P)$ es cerrado

BIBLIOGRAFÍA

1 AFRIAT S N *Orthogonal and oblique projectors and the charactenstics of pairs of vector spaces* Proc Cambndge Philos Soc 53(1957) 800 816

2 ANDERSON W N JR TRAPP G E *Shorted operators II* SIAM J Appl Math (1975) 60-71

3 ANDRUCHOW E CORACH G STOJANOFF D *Geometry of oblique projections* Studia Math **137** (1999) págs 61–79

4 ANTEZANA J 2006 *Proyecciones oblicuas y complementos de schur* Aplicaciones a problemas de cuadrados mínimos teoría de marcos y teoría de muestreo Universidad Nacional de la Plata Argentina 143 págs

5 ANTEZANA, J CORACH G *Sampling theory oblique projections and a question by Smale and Zhou* Applied and Computational Harmonic Analysis Elsevier (2006) 245 253

6 ANTEZANA J Y STOJANOFF D 2008 *Análisis matricial II Operadores en espacios de Hilbert* 151 págs

7 BAKSALARY J KALA, R *Two relations between oblique and orthogonal projections* Linear Algebra Appl 24(1979) págs 99 103

8 BOULDIN R *The product of operators with closed range* Tohoku Math J 25(1973) 359-363

9 BUCKHOLTZ D *Hilbert space idempotents and involutions* Proc Amer Math Soc 128 (2000) 1415 1418

10 CARLSON D *What are Schur complements anyway* Linear Algebra Appl 74(1986) 257 275

11 COJUHARI P GHEONDEA A *On lifting of operators to Hilbert spaces induced by positive seladjoint operators* J Math Anal Appl 304 (2005) 584–598

12 CORACH G MAESTRIPIERI A *Products of orthogonal projections and polar decompositions* AMS Subject Classification (2010) 20 págs

13 CORACH G MAESTRIPIERI A STOJANOFF D *Generalized orthogonal projections and shorted operators* Servicio de Publicaciones Universidad de La Rioja Spain (2001) 19 págs

14 CORACH G MAESTRIPIERI A. STOJANOFF D *Oblique projections and Schur complements* AMS Mathematical Subject Classification (2000) 20 págs

15 CORACH G MAESTRIPIERI A STOJANOFF D *Projections in operator ranges* (2005) 13 págs

16 CORACH G MAESTRIPIERI A STOJANOFF D 2005 *A classification of projectors* Topological algebras their applications and related topics Banach Center Publications 67 Polish Acad Sci Warsaw 145–160

17 CORACH G MAESTRIPIERI A. STOJANOFF D *A classification of projectors* Banach Center Publications Institute of mathematics polish academy of Sciences Warszawa 16 págs

18 CORACH G MAESTRIPIERI A STOJANOFF D *Generalized Schur complements and oblique projections* Linear Algebra and its Applications Vol 341(2002) 259–272

19 CORACH G MAESTRIPIERI A. STOJANOFF D *Oblique projections and abstract splines* Journal of Aproximation Theory 117 (2002) 189 206

20 CORACH G MAESTRIPIERI A. STOJANOFF D *Schur complements and oblique projections* Acta Sci Math 67 (2001) 439–459

21 COTTLE R W *Manifestations of the Schur complement* Linear Algebra Appl 8 (1974) 189 211

22 DEUTSCH F 2001 *Best approximation in inner product spaces* CMS Books in Mathematics Springer Verlag New York 338 págs

23 DEUTSCH F *The angle between subspaces in Hilbert space in Approximation theory wavelets and applications* (S P Singh editor) Kluwer Academic Publishers Netherlands (1995) 107 130

24 DIEUDONNÉ J *Quasi-hermitian operators* Proc Internat Symp Linear Spaces Jerusalem (1961) 115 122

25 DOUGLAS R *On majorization factorization and range inclusion of operators in Hilbert Space* Proc Amer Math Soc **17** (1966) 413–416

26 FILLMORE P A. WILLIAMS J P *On operator ranges* Advances in Math 7(1971) 254 281

27 GALAZ F 2006 *Elementos de Análisis Funcional* Centro de Investigación en Matemáticas S y G Editores S A de C V México 370 págs

28 GIRIBET J I MAESTRIPIERI A MARTÍNEZ F *Shorting selfadjoint operators in Hilbert spaces.*

29 GONZALEZ M C 2009 *Soluciones reducidas de ecuaciones tipo Douglas y proyecciones oblicuas* Universidad Nacional de la Plata Argentina 103 págs

30 GREVILLE T N E Solutions of the matrix equations $XAX = X$ and relations between oblique and orthogonal projectors SIAM J Appl Math 26(1974) 828-832

31 HASSI S NORDSTRÖM K *On projections in a space with an indefinite metric Linear Algebra Appl* 208/209 (1994) págs 401-417

32 IZUMINO S *The product of operators with closed range and an extension of the reverse order law* Tohoku Math J 34 (1982) 43-52

33 KATO T 1980 *Perturbation Theory for Linear Operators* Editorial Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 643 págs

34 KREIN M G *The theory of self-adjoint extensions of semibounded Hermitian operators and its applications* Mat Sb (N S) 20 (62) (1947) 431-495

35 KREYSZIG E 1978 *Introductory Functional Analysis with applications* University of Windsor United States of America 703 págs

36 LAX P D *Symmetrizable linear transformations* Comm Pure Appl Math 7(1954) 633-647

37 LUSTERNIK L SOBOLEV V 1974 *Elements of Functional Analysis* Hindustan Publishing Corporation 360 págs

38 MAESTRIPIERI A MARTÍNEZ F *Decomposition of selfadjoint projections in Krein spaces* Acta Math (Szeged) 72 No 3-4(2006) 611 638

39 MAESTRIPIERI A MARTÍNEZ F *Decomposition of Selfadjoint Projections in Krein Spaces* Acta Sci Math 72(2006) 611-638

40 MARTÍNEZ F 2008 *Problemas de aproximación en espacios con métrica indefinida* Universidad Nacional de la Plata Argentina 129 págs

41 NASHED M Z 1976 *Generalized Inverses and Applications* Academic New York 1954 págs

42 NASHED M Z *Inner outer and generalized inverses in Banach and Hilbert spaces* Numer Funct. Anal Optim 9(1987) 261–325

43 NASHED M Z *On generalized inverses and operator ranges* Funct. Anal and Approx (1980) 85 96

44 NAYLOR A SELL G 2000 *Linear Operator Theory in Engineering and Science Applied Mathematical Sciences* Springer Verlag New York 624 págs

45 PASTERNAK WINIARSKI Z *On the dependence of the orthogonal projector on deformations of the scalar product* Studia math 128 (1998) 1–17

46 PEKAREV E L *Shorts of operators and some extremal problems* Acta Sci Mat (Szeged) 56 (1992) 147 163

47 PTAK, V *Extremal operators and oblique projections* Casopis pro pestování Matematiky (1985) 343-350

48 REED M SIMON B 1975 *Fourier Analysis Self Adjointness* First Edition Academic Press United States of America 361 págs

49 REID W T *Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space* Duke Math J 18 (1951) 41–56

50 SENGUPTA A. *Notes Functional Analysis* 2002 6 págs

51 SMUL JAN JU L. *A Hellinger operator integral* (Russian) Mat. Sb (N S) 49 (91) 381-430 (English) Amer Math Soc (1959) Translations 22 (1962) 289-337

52 STEWART G W *On scaled projections and pseudo inverses* Linear Algebra Appl 112 (1989) 189-193

53 STOJANOFF D 2010 *Análisis Funcional vs Matricial* 451 págs

54 ZAANEN A.C *Normalisable transformations in Hilbert space and systems of linear equations* Acta Math 83 (1950) 197 248